

Rozchodzenie się powierzchniowych fal Love'a w niejednorodnych sprężystych ośrodkach gradientowych

- Dr hab. Piotr Kiełczyński, prof. w IPPT PAN,

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych

Zespół Badawczy Akustoelektroniki

15 czerwca 2015 r., Warszawa, Polska.



PLAN SEMINARIUM

1. Wstęp
2. Zastosowania fal Love'a
3. Stan wiedzy (state of the art)
4. Uogólnione Zagadnienie Sturm-Liouville'a dla fali Love'a rozchodzącej się w Funkcjonalnych Materiałach Gradientowych (w FGM-ach)
5. Metody rozwiązywania Zagadnienia Sturm-Liouville'a
6. Metoda Macierzy Przejścia
7. Wyniki obliczeń numerycznych dla fali Love'a w niejednorodnym falowodzie sprężystym z ceramiki PZT-4
8. Uproszczony problem Sturm-Liouville'a dla fal Love'a rozchodzących się w FGM-ach
9. Prędkość grupowa fali Love'a w FGM wzory analityczne
10. Podsumowanie i Wnioski
11. Przyszłe prace

Zastosowania fal Love'a

- A. Sensory wielkości fizycznych (np. lepkość, gęstość), chemo-sensory, bio-sensory. FGM-y zwiększają czułość, poprawiają charakterystyki pracy
- B. Sejsmologia i geofizyka. Badanie wnętrza Ziemi. Projektowanie budynków odpornych na Trzęsienia Ziemi. Poszukiwanie surowców naturalnych (ropa naftowa, gaz)
- C. Badania nieniszczące
 - 1. Badanie jakości cienkich warstw NEMS (Nano Electromechanical Systems)
 - 2. Badanie właściwości sprężystych FGM-ów. Wyznaczanie profili zmian właściwości sprężystych oraz gęstości w FGM-ach.
Profile te powstają w wyniku działania różnych procesów technologicznych: nawęglanie, azotowanie, naborowywanie, hartowanie np. laserowe, epitaksja, dyfuzja, implantacja

Nowa obiecująca technika badawcza: LUS – Laser Ultrasonics

Wybrane prace własne dotyczące fal Love'a

- A. Kiełczyński, P., 1981. Propagation of surface SH waves in nonhomogeneous media. *Journal of Technical Physics*, 22, 73-78.
- B. Kiełczyński, P., Pajewski, W., 1989. Inverse method for determining the depth of nonhomogeneous surface layers in elastic solids from the measurements of the dispersion curves of group velocity of surface SH waves. *Applied Physics A*, 48, 423-429.
- C. Kiełczyński, P., Szalewski, M., 2011. An inverse method for determining the elastic properties of thin layers using Love surface waves. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 19, 31-43.
- D. Kiełczyński, P., Szalewski, M., Balcerzak, A., Rostocki, A.J., Tefelski, D.B., 2011. Applications of SH surface acoustic waves for measuring the viscosity of liquids in function of pressure and temperatures. *Ultrasonics*, 51, 921-924.
- E. Kiełczyński, P., Szalewski, M., Balcerzak, A., 2012, Effect of a viscous liquid loading on Love wave propagation. *International Journal of Solids and Structures*. 49, 2314-2319.
- F. Kiełczyński, P., Szalewski, M., Balcerzak, A., 2014. Inverse procedure for simultaneous evaluation of viscosity and density of Newtonian liquids from dispersion curves of Love waves. *Journal of Applied Physics*, 116, 044902 (7 pages).

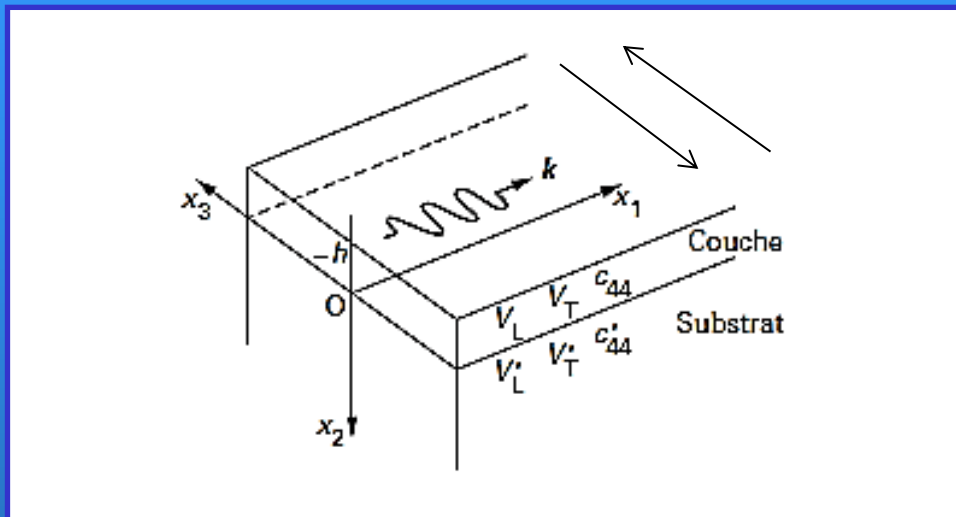
Stan wiedzy (State of the art)

(Fale Love'a w ośrodkach niejednorodnych - FGM-ach)

1. Maugin G.A., „Elastic surface waves with transverse horizontal polarization”, *Advances in Applied mechanics*, 1983, 23, 373-434. Rozwiązania analityczne. Profile są niefizyczne.
2. Qian Z-H, Jin F, Lu T, Kishimoto K, Hirose S, „Effect of initial stress on Love wave propagation in a piezoelectric structure carrying a functionally graded material layer”, *Ultrasonics*, 2010, 50(1), 84-90. Przybliżona metoda (WKB) Wentzel, Kramers, oraz Brillouin – (1926).
3. A.L. Shuvalov, E. Le Clezio, G. Feuillard, „The state-vector formalism and the Peano-series solution for modelling guided waves in functionally graded anisotropic piezoelectric plates”, 2008, 929-94. Metoda rozwinięcia Peano -1888.
4. Nie G., Liu X, Liu J., „Effect in inhomogeneous initial stress on Love wave propagation in 0.67Pb(Mg Nb)O -0.33PbTiO single crystal layered structure”, *Meccanica*, 2015, 50, 119-132.
Metoda szeregów Frobeniusa (1873) – Problem zbieżności i obcięcia szeregu.
5. Ballandras S., Reinhard A., Laude V., et al., Simulations of surface acoustic wave devices built on stratified media using a mixed finite element/boundary integral formulation, *Journal of Applied Physics*, 2004, 96, 77731-7741. Metoda Elementu Skończonego, Metoda Elementu Brzegowego. Ośrodki uwarstwione.

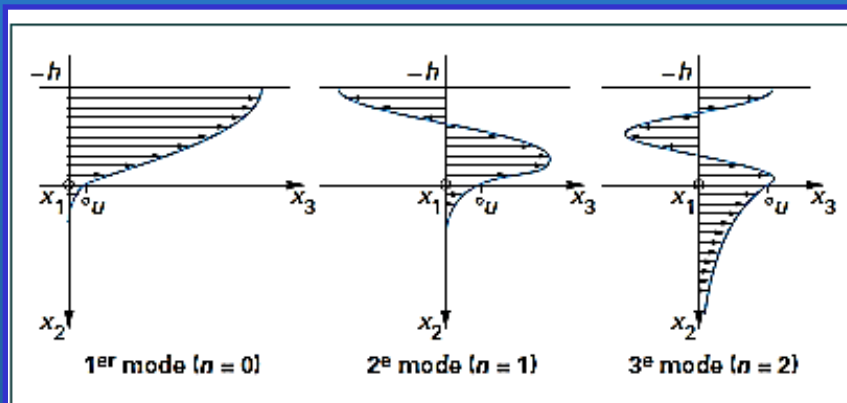
Fale Love'a :

- Przemieszczenie mechaniczne. (Fale dyspersyjne)
- Zakres częstotliwości od 0.001 Hz do 1 GHz



Poprzeczna fala powierzchniowa nie istnieje w jednorodnej półprzestrzeni sprężystej

Rys.1



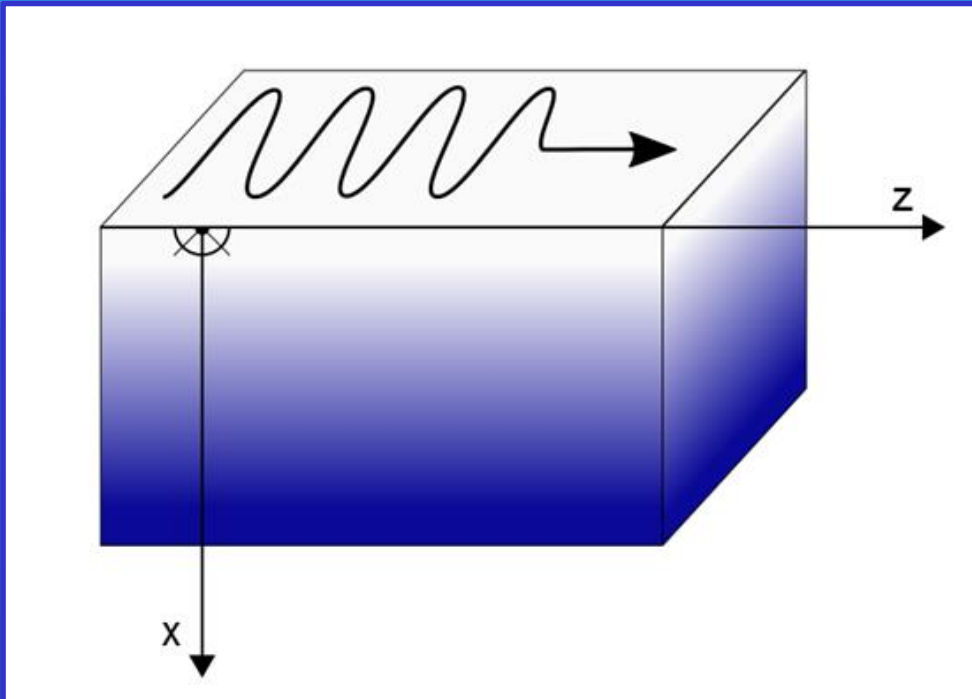
Rys.2

Figure 17 – Onde de Love : amplitude du déplacement en fonction de la profondeur pour le couple silice/silicium

Problem Prosty dla fali Love'a

Uogólnione Zagadnienie Sturm-Liouville'a

- Problem Prosty dla fali Love'a rozchodzącej się w niejednorodnym falowodzie sprężystym polega na wyznaczeniu prędkości fazowej i grupowej fali znając wszystkie parametry materiałowe falowodu (profil rozkładu współczynnika sprężystości)



Parametry materiałowe



Prędkość fazowa i grupowa fali

Rys.3 Niejednorodny sprężysty falowód fali Love'a (FGM)

Założenia:

1. Rozpatrujemy pierwszy mod (rodzaj drgań) fal Love'a
2. Przeprowadzona analiza ważna jest dla niejednorodnych falowodów izotropowych oraz dla wyróżnionych kierunków w półprzestrzeni sprężystej o symetrii regularnej oraz heksagonalnej
3. Właściwości sprężyste ośrodka zmieniają się tylko wzdłuż głębokości oś x
4. Rozpatrywane ośrodki są bezstratne
5. Gęstość materiału jest stała w całej objętości

Model Matematyczny:

Postulujemy następującą postać przemieszczenia fali Love'a :

$$v(x, z, t) = V(x) \cdot \exp j(\beta z - \omega t) \quad (1)$$

β = liczba falowa fali Love'a

Równanie ruchu:

w niejednorodnym falowodzie sprężystym =
równanie ruchu dla niejednorodnego ciała
sprężystego

Warunki brzegowe:

- a) Zerowanie się naprężeń stycznych na powierzchni swobodnej
($x=0$)
- b) Zerowanie się przemieszczenia mechanicznego w
nieskończoności (dla $x = \infty$)

Model Matematyczny: Uogólnione Zagadnienie Sturm-Liouville'a

$$\frac{d}{dx} \left(c_{44}(x) \frac{dV(x)}{dx} \right) + \rho \omega^2 V(x) = c_{44}(x) \beta^2 V(x) \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} V(0) = 0$$

$$V(\infty) = 0 \quad (3)$$

$V(x)$ = jest wektorem własnym

β^2 = jest wartością własną

Metody rozwiązywania Prostej Zagadnienia Sturm-Liouville'a

- Metoda Różnic Skończonych (MRS)
- Metody wariacyjne
- Metoda Galerkin
- Metoda elementu Skończonego (MES)
- Metoda Elementu Brzegowego (MEB)
- Metoda Funkcji Greena
- Metoda Macierzy Przejścia (Geofizyka)

Wzór wiążący prędkość fazową i grupową fali Love'a (Adamsa)

$$\beta^2 = \frac{\int_0^\infty \left[-c_{44}(x) \left(\frac{dV(x)}{dx} \right)^2 + \rho \omega^2 V^2(x) \right] dx}{\int_0^\infty c_{44}(x) V^2(x) dx} \quad (4)$$

$$\frac{v_p v_g}{v_0^2} = \frac{\int_0^\infty \frac{c_{44}(x)}{c_0} V^2(x) dx}{\int_0^\infty V^2(x) dx} \quad (5)$$

Metoda Macierzy Przejścia

$$T = c_{44}(x) \frac{dV}{dx}$$

$$V = V(x)$$

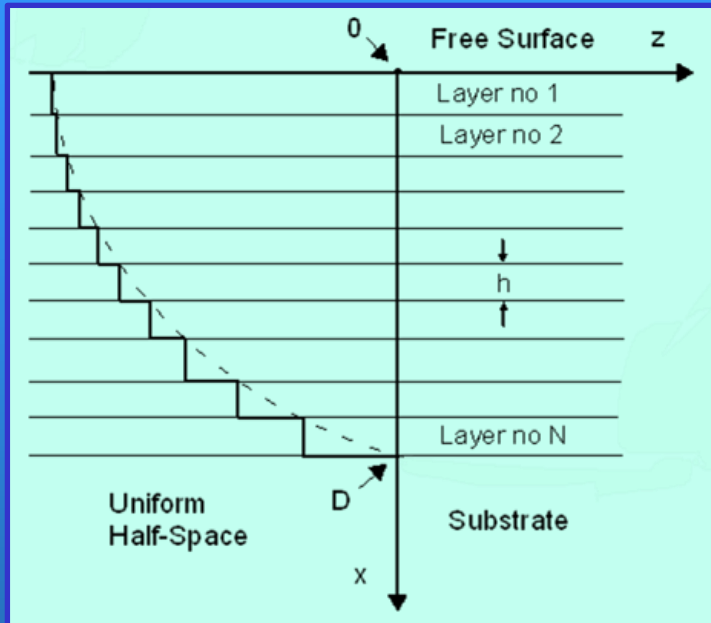
Równanie różniczkowe drugiego stopnia (2) przedstawiamy jako układ 2 równań różniczkowych pierwszego stopnia

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c_{44}(x)} \\ \beta^2 c_{44}(x) - \omega^2 \rho(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} \quad (6)$$

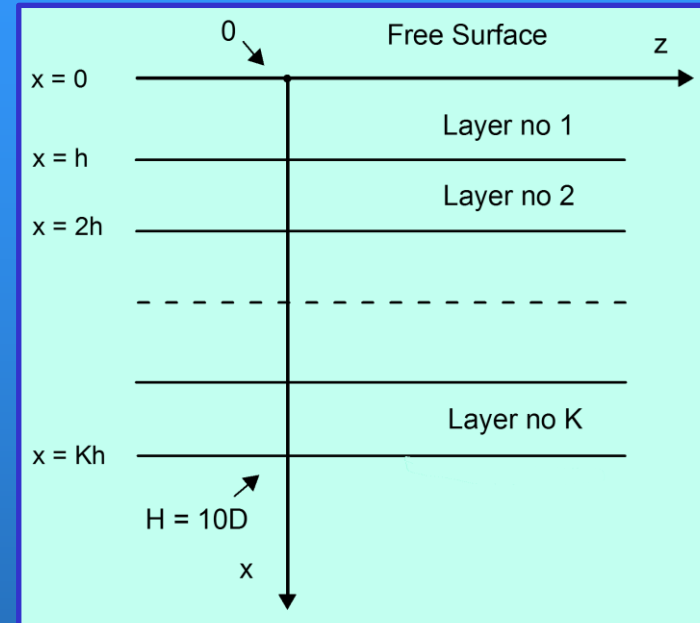
Składowa naprężenia: $\tau_{yx} = T(x) \cdot \exp[j(\beta z - \omega t)]$.

Metoda Macierzy Przejścia

a)



b)



Rys.4a,b Podział niejednorodnego falowodu na jednorodne warstwy sprężyste.
a) Dla profili potęgowych, b) dla profili typu wykładniczego oraz typu $1/ch^2$.

Metoda Macierzy Przejścia

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ T(x) \end{bmatrix} = [\exp(Ax)] \cdot \begin{bmatrix} V(0) \\ T(0) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Macierz [A] może być zdiagonalizowana:

$$[\exp(Ax)] = [U] \cdot [\exp(Dx)] \cdot [U^{-1}] = \begin{bmatrix} 1, & 1 \\ v, & -v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(vx), & 0 \\ 0, & \exp(-vx) \end{bmatrix} \frac{1}{2v} \begin{bmatrix} v, & 1 \\ v, & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\exp(Ax)] = \cos(qx) \begin{bmatrix} 1, & \frac{1}{c_{44}(x)q} \tan(qx) \\ -c_{44}(x)q \tan(qx), & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} \Big|_{x=h} = \cos(qh) \cdot \begin{bmatrix} 1, & \frac{1}{c_{44}(h)q} \tan(qh) \\ -c_{44}(h)q \tan(qh), & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} \Big|_{x=0} \quad (9)$$

Metoda Macierzy Przejścia

$$\begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} \Big|_{x=0} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V \\ T \end{bmatrix} \Big|_{x=H} \quad (10)$$

Wykorzystując warunki brzegowe otrzymujemy:

$$P_{22}(\beta^2, \omega) = 0 \quad (11)$$

$$v_p = \omega / \beta$$

Scilab

Równanie (11) jest równaniem dyspersyjnym dla fali Love'a w Rozchodzącej się w niejednorodnym ośrodku sprężystym

Obliczenia numeryczne

Niejednorodny falowód sprężysty z ceramiki piezoelektrycznej PZT-4.

Dane materiałowe:

$$c_0 = 2.564 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2} ; v_0 = 1849 \text{ m/s}$$

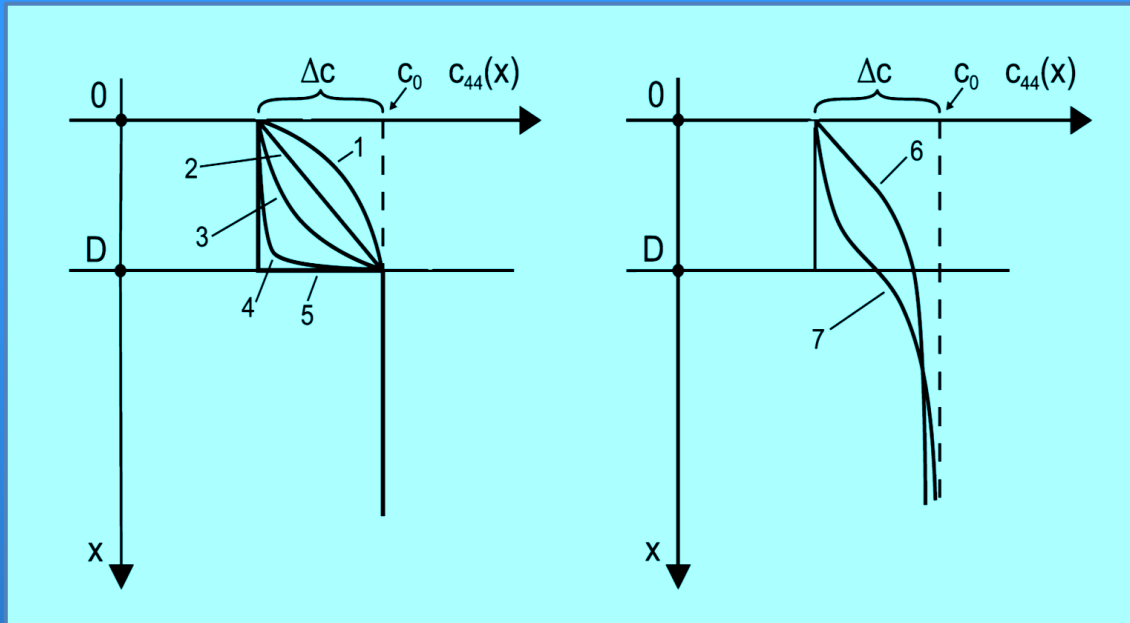
$$\rho_0 = 7.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 ; \Delta c/c_0 = 0.088$$

Grubość $D = 0.4 \text{ mm}$

$$s_0 = 0.39 \cdot 10^{-10} \frac{m^2}{N} ; v_0 = 1849 \text{ m/s} ;$$

$$\rho_0 = 7.5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 ; \Delta s/s_0 = 0.0966$$

Rysunek profile potęgowe



Rys.5. Profile potęgowe $c_{44}(x)$ w niejednorodnej warstwie powierzchniowej

$$c_{44}(x)/c_0 = 1 - (\Delta c/c_0) [1 - (x/D)^{1/2}][H(x - D) - H(x)]$$

$$c_{44}(x)/c_0 = 1 - (\Delta c/c_0) [1 - (x/D)^1][H(x - D) - H(x)]$$

$$c_{44}(x)/c_0 = 1 - (\Delta c/c_0) [1 - (x/D)^2][H(x - D) - H(x)]$$

$$c_{44}(x)/c_0 = 1 - (\Delta c/c_0) [1 - (x/D)^{10}][H(x - D) - H(x)]$$

$$c_{44}(x)/c_0 = 1 - (\Delta c/c_0) [H(x - D) - H(x)]$$

$$c_{44}(x)/c_0 = 1 - (\Delta c/c_0) \cdot \exp(-2x/D)$$

$$c_{44}(x)/c_0 = 1 - (\Delta c/c_0) \cdot 1/\cosh^2(2x/D)$$

Zastosowanie metody Haskella

Profile potęgowe

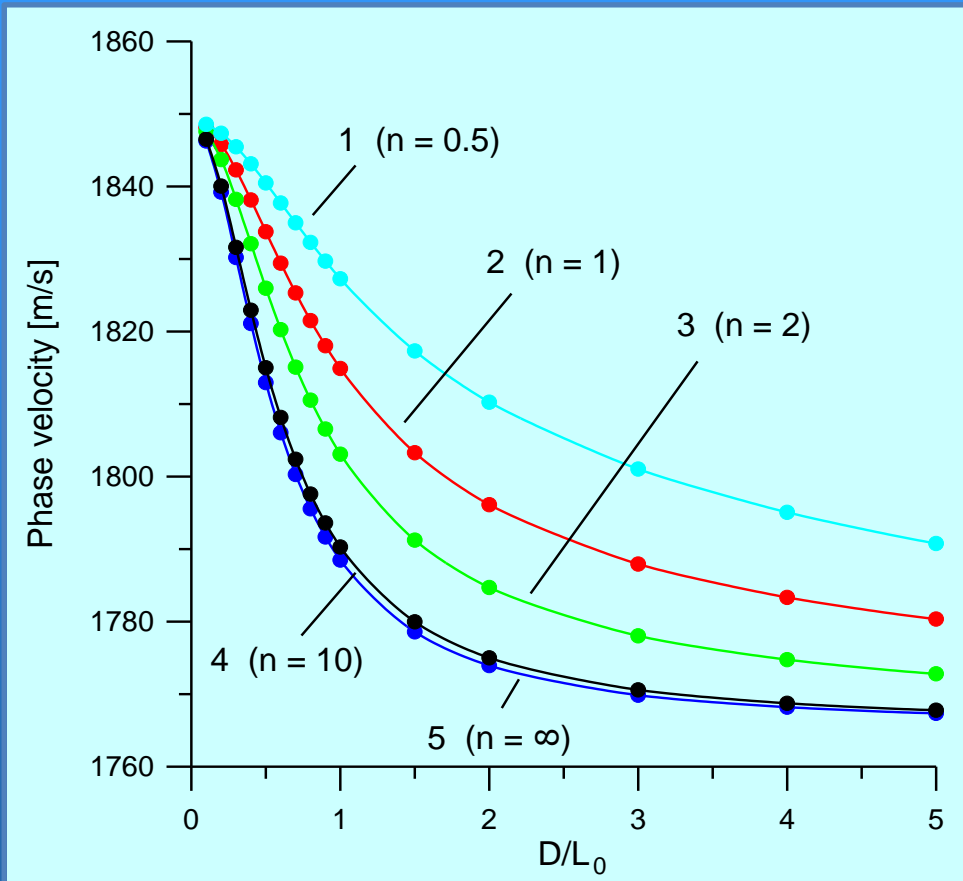


Fig.6. Prędkość fazowa dla fali Love'a w przypadku profili potęgowych.

Profil liniowy

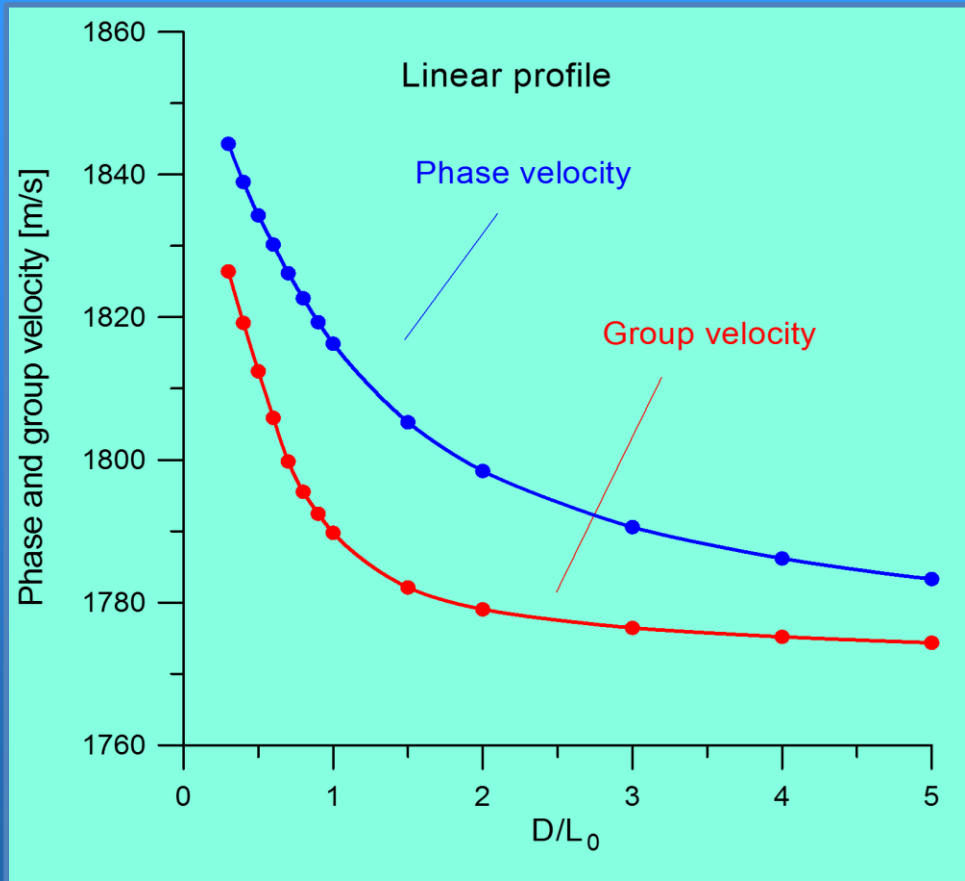


Fig.7. Prędkość fazowa i grupowa dla fali Love'a w przypadku profilu liniowego.

Profil kwadratowy

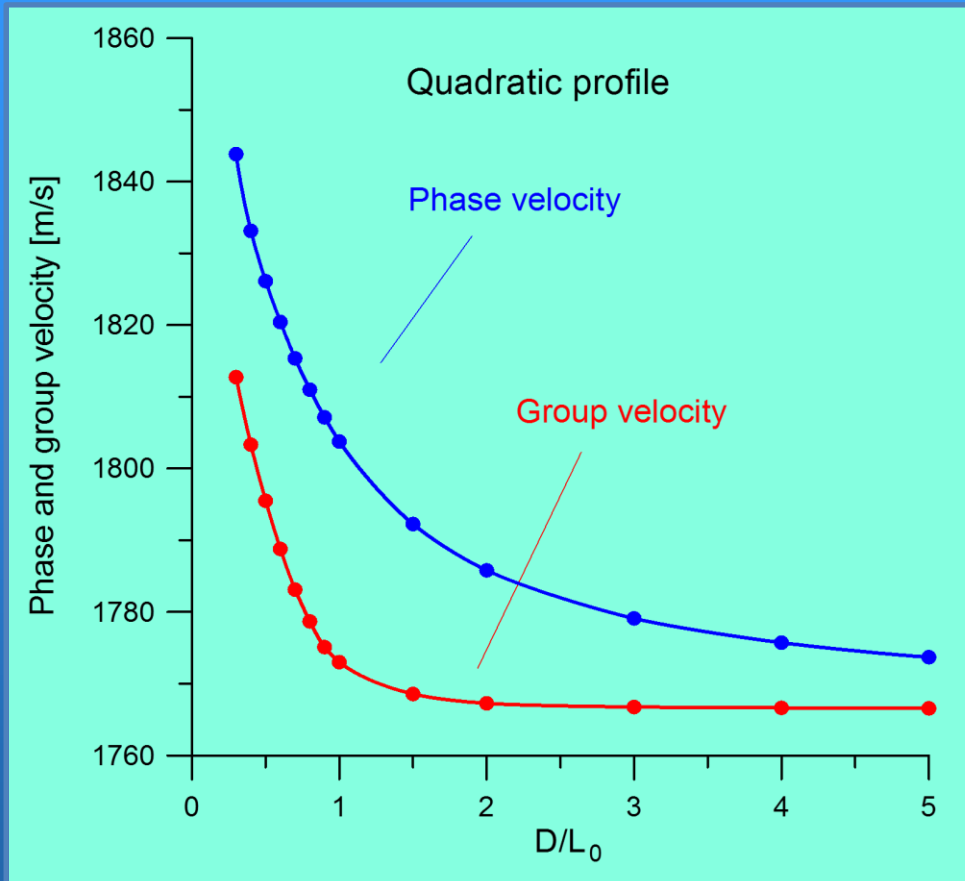


Fig.8. Prędkość fazowa i grupowa dla fali Love'a w przypadku profilu kwadratowego.

Model Matematyczny: Uproszczony Problem Sturm-Liouville'a

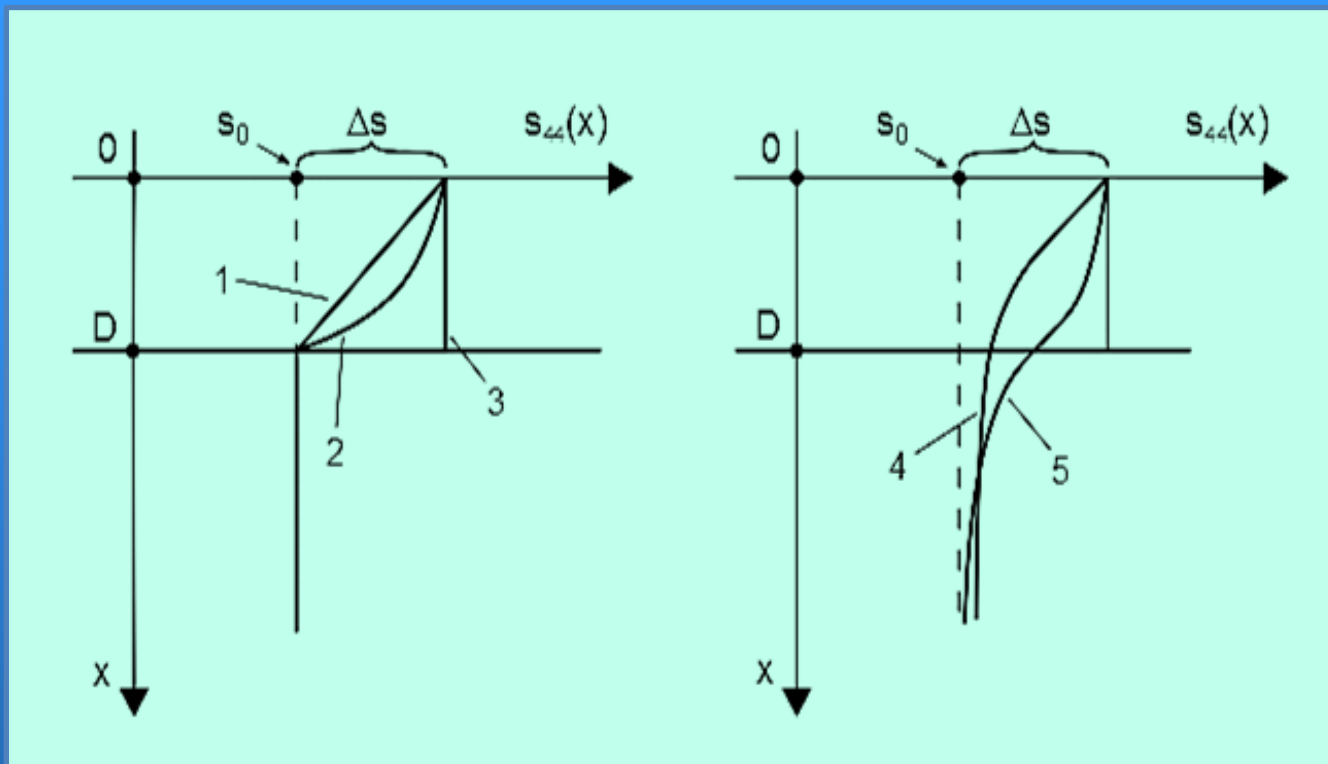
$$z(x) = (c_{44}(x))^{1/2}V(x) \qquad \frac{1}{2c_{44}} \left[\frac{d^2 c_{44}}{dx^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{dc_{44}}{dx} \right)^2 \frac{1}{c_{44}^2} \right] = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \rho \omega^2 s_{44}(x)z = \beta^2 z \qquad (12)$$

$$\frac{dz(0)}{dx} = 0 \quad ; \quad z(\infty) = 0 \qquad (13)$$

$$s_{44}(x) = 1/c_{44}(x)$$

Rysunek profile potęgowe (s_{44})



Rys.9. Profile potęgowe $s_{44}(x)$ w niejednorodnej warstwie powierzchniowej

Analogie Uproszczonego Zagadnienia Sturm-Liouville'a

1) Optyką Zintegrowaną

Równanie (10) jest analogiczne z równaniem opisującym mod fali TE rozchodzącej się planarnym światłowodzie gradientowym
Równanie (3) jest analogiczne z równaniem opisującym mod fali TM rozchodzącej się planarnym światłowodzie gradientowym

2) oraz Mechanika Kwantową

Równanie (10) jest analogiczne z równaniem Schrodingera opisującym ruch cząstki kwantowej w jamie potencjalnej

Profil skokowy

$$F(\omega, \beta) = \tan \left[\left(\sqrt{\left(\frac{\omega}{v_L}\right)^2 - \beta^2} \right) D \right] - \frac{(s_0 + \Delta s) \left(\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{v_0}\right)^2} \right)}{s_0 \left(\sqrt{\left(\frac{\omega}{v_L}\right)^2 - \beta^2} \right)} = 0 \quad (14)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = -\frac{\partial F / \partial \beta}{\partial F / \partial \omega} = \frac{1}{v_p} \frac{\left\{ \frac{(s_0 + \Delta s)}{s_0 \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{v_0}\right)^2}} + \frac{\tan \left(D \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_L}\right)^2 - \beta^2} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{v_L}\right)^2 - \beta^2}} + \frac{D}{\cos^2 \left(D \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_L}\right)^2 - \beta^2} \right)} \right\}}{\left\{ \frac{(s_0 + \Delta s)}{s_0 v_0^2 \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{v_0}\right)^2}} + \frac{\tan \left(D \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_L}\right)^2 - \beta^2} \right)}{v_L^2 \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_L}\right)^2 - \beta^2}} + \frac{D}{v_L^2 \cos^2 \left(D \sqrt{\left(\frac{\omega}{v_L}\right)^2 - \beta^2} \right)} \right\}} \quad (15)$$

Profil skokowy

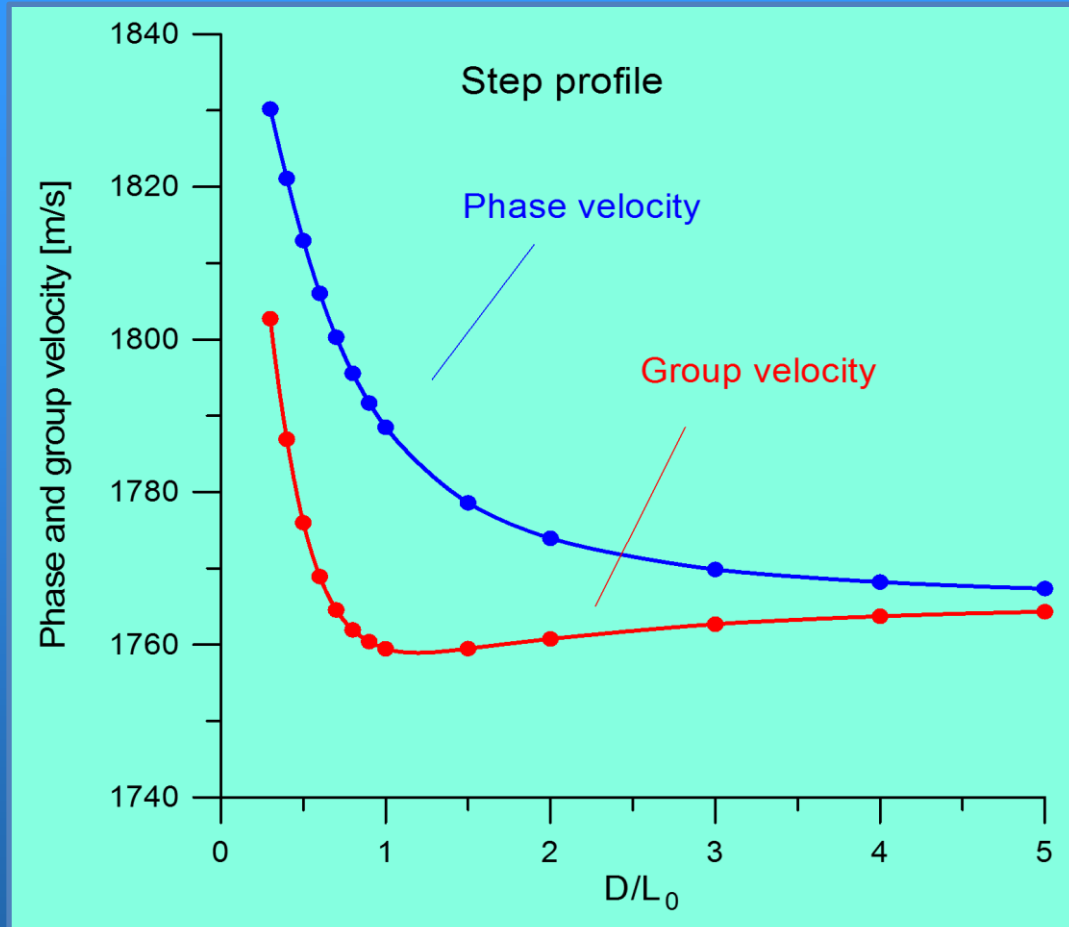


Fig.10. Prędkość fazowa i grupowa dla fali Love'a w w przypadku profilu skokowego.

Profil wykładniczy

$$\left. \frac{d}{dx} J_p(x) \right|_{x=V} = 0 \quad V = A J_p\left(-V \frac{x}{D}\right)$$

$$F_1(\omega, \beta) = \beta^2 - \frac{\omega^2}{v_0^2} - \frac{p^2(\omega)}{D^2} = 0$$

(16)

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = - \frac{\partial F_1 / \partial \beta}{\partial F_1 / \partial \omega} = \frac{v_0^2}{v_p} \frac{1}{\left\{ 1 - \frac{v_0^2 p}{\omega D^2} \frac{-p}{V^2} \left(\frac{dV}{d\omega} \right) J_p(V) + \frac{p}{V} \frac{d}{d\omega} (J_p(V)) - \frac{d}{d\omega} (J_{p+1}(V)) \right\}}$$

$$\frac{1}{V J_p(V) + \frac{p}{V} \frac{dJ_p(V)}{dp} - \frac{d}{dp} (J_{p+1}(V))}$$

(17)

gdzie: $V = \frac{\omega D}{v_0} \sqrt{\frac{\Delta s}{s_0}}$, and $J_p(x)$
is the Bessel function of the order p .

Profil wykładniczy

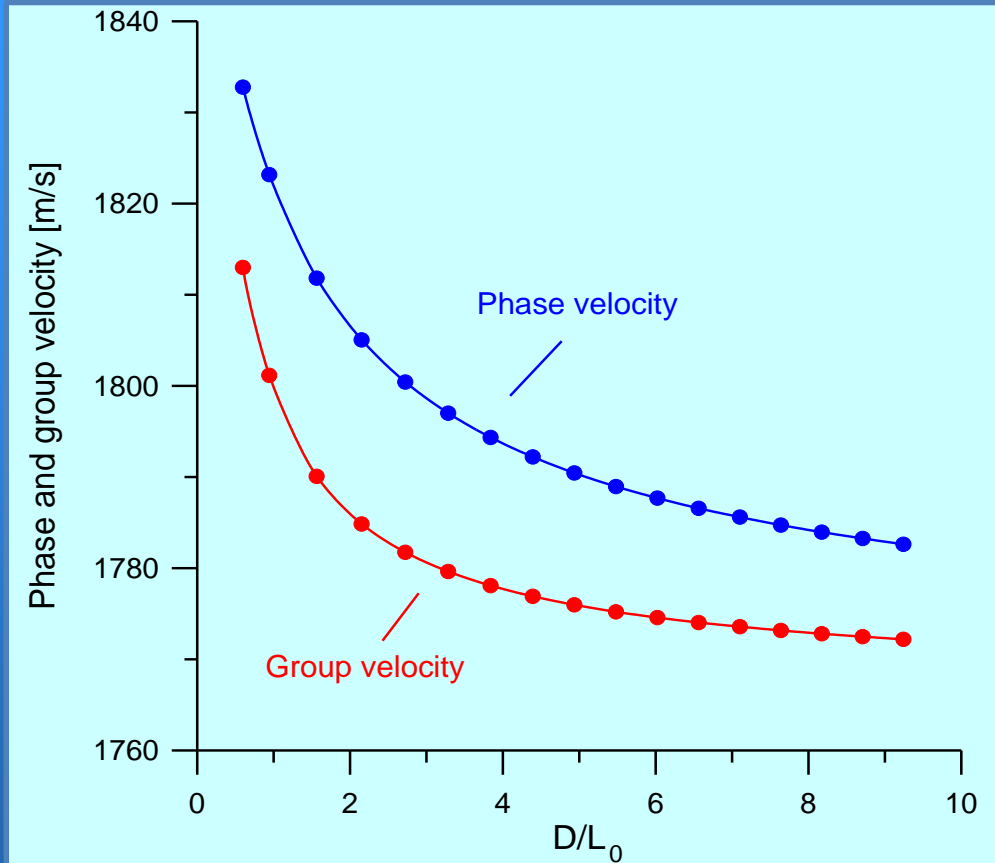


Fig.11. Prędkość fazowa i grupowa dla fali Love'a w przypadku profilu wykładniczego.

Profil typu $1/\cosh^2$

$$F_2(\omega, \beta) = \beta^2 - \frac{\omega^2}{v_0^2} - \frac{4s^2(\omega)}{D^2} = 0 \quad (18)$$

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = -\frac{\partial F_2/\partial\beta}{\partial F_2/\partial\omega} = \frac{v_0^2}{v_p} \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{v_0^2} h^2 \frac{\Delta s}{s_0}}}{\left\{ \left(1 + \frac{\Delta s}{s_0}\right) \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{v_0^2} h^2 \frac{\Delta s}{s_0}} - \frac{\Delta s}{s_0} \right\}} \quad (19)$$

gdzie: $s(\omega) = \frac{1}{2} \{ \sqrt{1 + V^2} - 1 \}$, and $V = \frac{\omega D}{v_0} \sqrt{\frac{\Delta s}{s_0}}$.

Profil typu $1/\cosh^2$

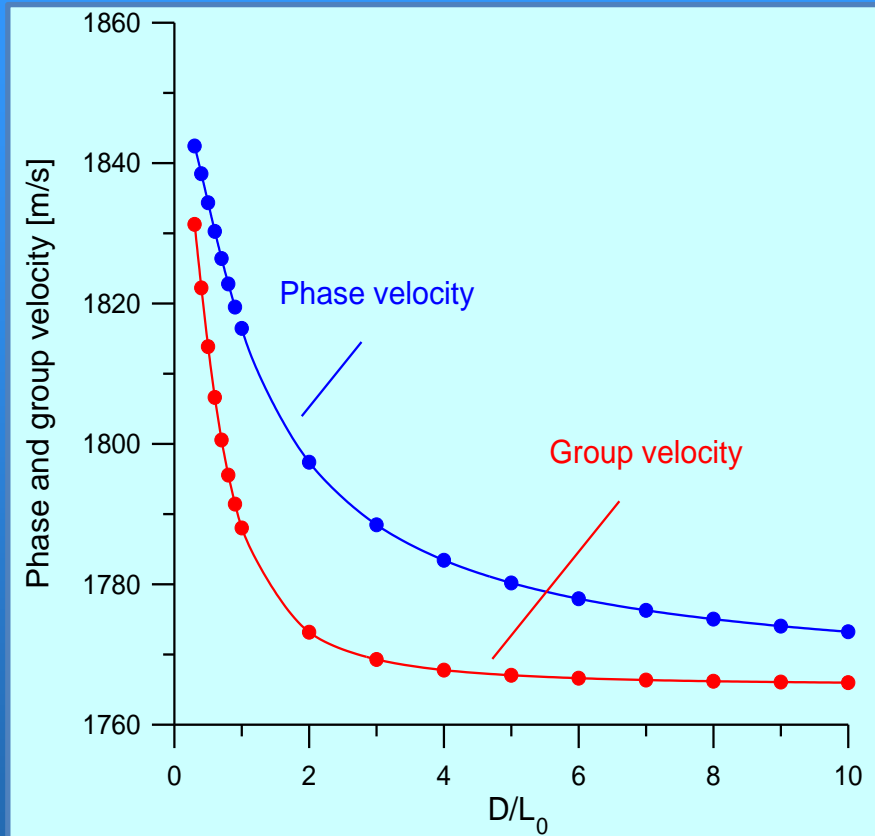
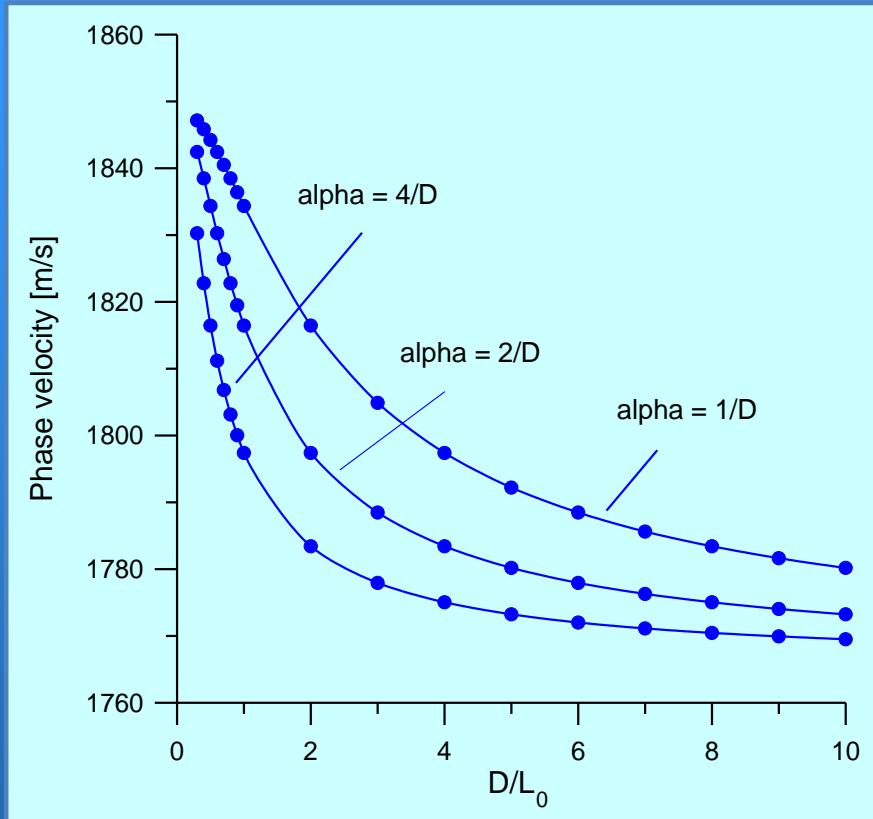


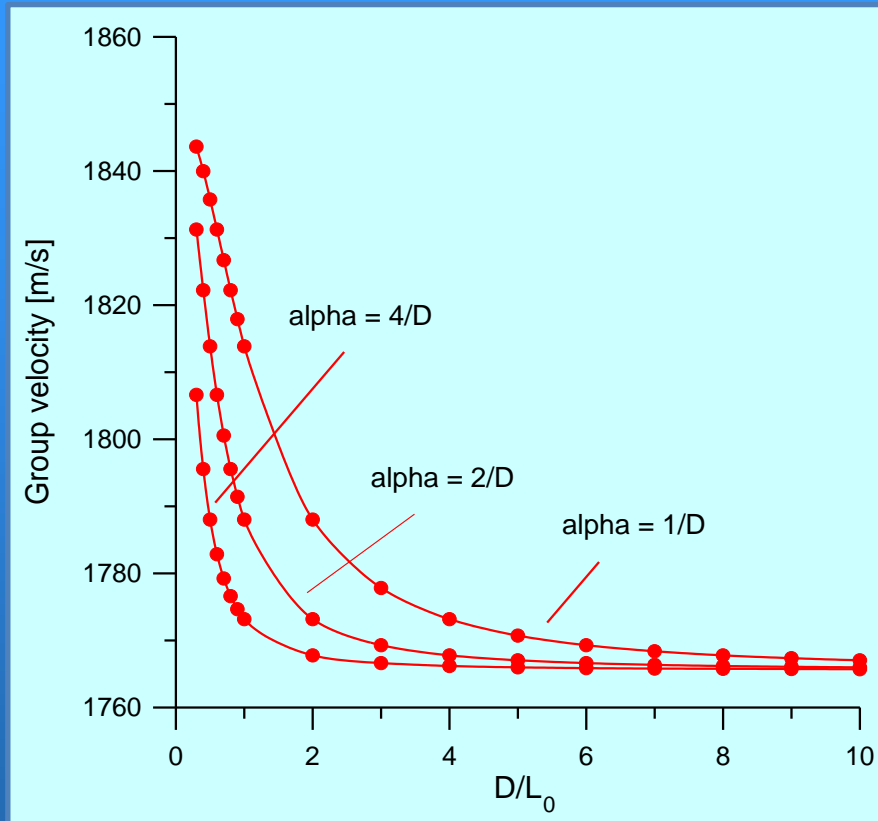
Fig.12. Prędkość fazowa i grupowa dla fali Love'a w w przypadku profilu typu $1/\cosh^2$.

Wpływ niejednorodności



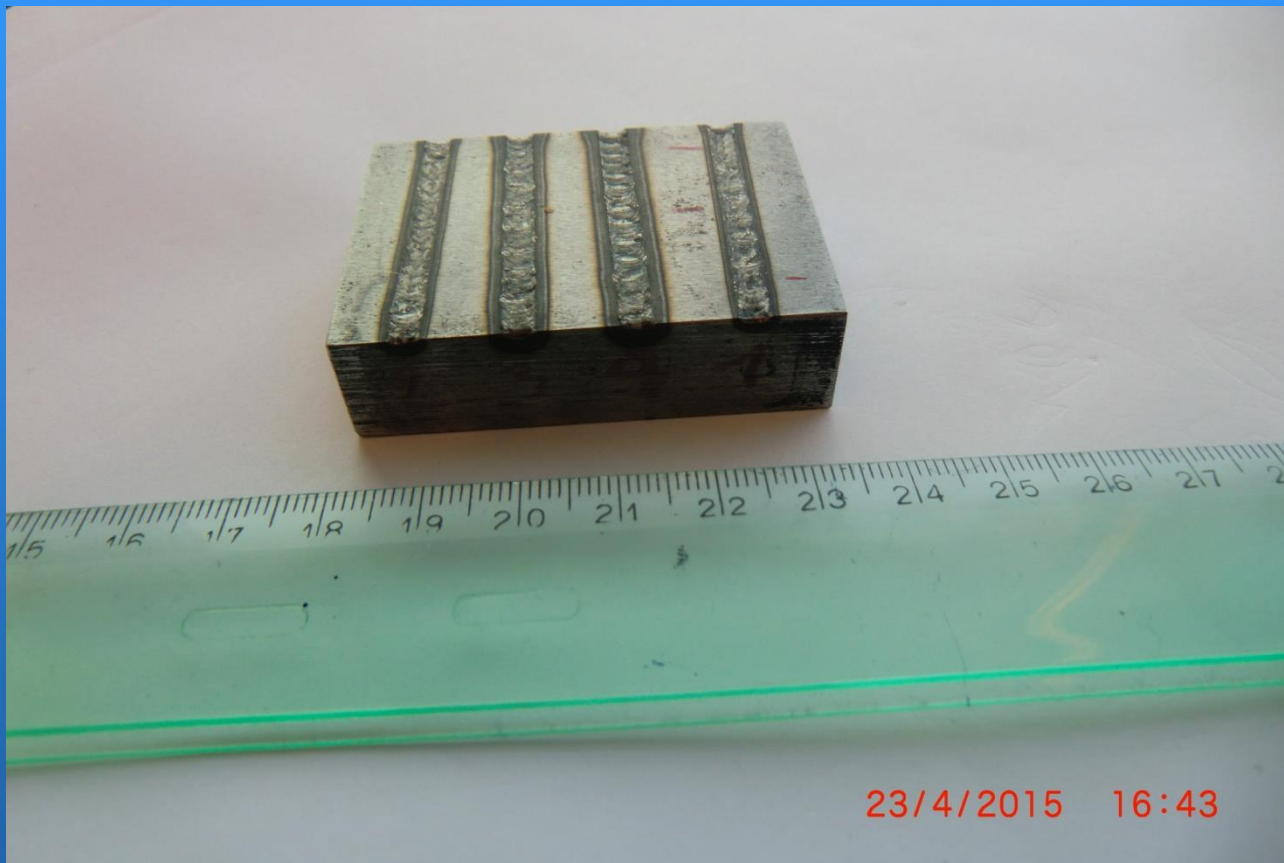
Rys.13 Prędkość fazowa dla fali Love'a dla różnych wartości parametru niejednorodności α dla profilu typu $1/\cosh^2(\alpha x)$.

Wpływ niejednorodności



Rys.14 Prędkość grupowa dla fali Love'a dla różnych wartości parametru niejednorodności α dla profilu typu $1/\cosh^2(\alpha x)$.

Falwody fali Love'a powstałe na skutek hartowania laserowego



STAL 45

Struktura FGM

Martenzyt

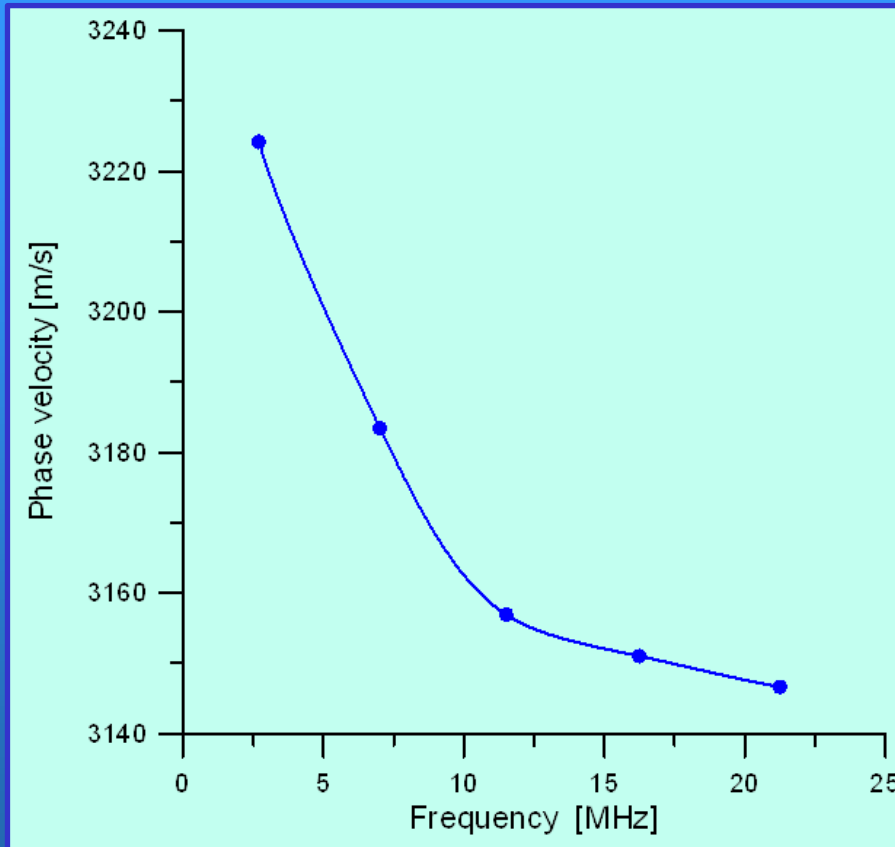
Bainit

Bainit + Perlit

Ferryt + Perlit

Rys.15

Eksperymentalna krzywa dyspersji



Rys.16. Krzywa dyspersji fali Love'a w niejednorodnym falowodzie sprężystym powstałym na skutek hartowania laserowego w stali 45.

Podsumowanie

1. Sformułowano Uogólniony Problem Sturm-Liouville'a dla fal Love'a rozchodzących się w niejednorodnych ośrodkach sprężystych (FGM-ach)
2. Sformułowano Uproszczony Problem Sturm-Liouville'a dla fal Love'a rozchodzących się w niejednorodnych ośrodkach sprężystych (FGM-ach)
3. Rozwiązano Uogólniony Problem Sturm-Liouville'a stosując Metodę Macierzy Przejścia oraz Metodę Różnic Skończonych
4. Rozwiązano analitycznie Uproszczony Problem Sturm-Liouville'a dla wybranych profili właściwości sprężystych
5. Wyprowadzono wzory analityczne na prędkość grupową fali Love'a dla wybranych profili właściwości sprężystych

Wnioski

1. Wyniki badań pokazują, że fale Love'a mogą rozchodzić się w wybranych niejednorodnych sprężystych Ośrodkach Gradientowych.
2. Stwierdzono wpływ parametru niejednorodności na krzywe dyspersji prędkości fazowej oraz grupowej fali Love'a
3. Otrzymane wyniki badań mogą znaleźć zastosowanie:
 - a) w projektowaniu i konstrukcji sensorów wielkości fizycznych, chemo-sensorów, biosensorów oraz przetworników
 - b) w sejsmologii i geofizyce do badania struktury wnętrza Ziemi
 - c) w badaniach nieniszczących do badania
 - I. właściwości sprężystych nanowarstw , do badania profili właściwości sprężystych
 - II. w Funkcjonalnych Materiałach Gradientowych (FGM)

Przyszłe Prace

I. Zagadnienia Odwrotne dla fali Love'a

1. Wyznaczenie parametrów reologicznych cieczy lepkosprężystych: $G = \mu + j\eta$
2. Wyznaczenie profili właściwości sprężystych w niejednorodnych sprężystych materiałach gradientowych - (FGM)

Zastosowanie procedur Optymalizacyjnych:

- a) Symulowane wygrzewanie
- b) Algorytmy genetyczne
- c) Algorytmy ewolucyjne techniki

II. Zastosowanie do generacji i detekcji fal ultradźwiękowych techniki LUS – Laser Ultrasonics