

Problem Odwrotny rozchodzenia się fali Love'a w falowodach sprężystych obciążonych cieczą lepką

- Dr hab. Piotr Kiełczyński, prof. w IPPT PAN,

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych
Zespół Badawczy Akustoelektroniki

14 grudnia 2012 r., Warszawa, Polska.



PLAN SEMINARIUM

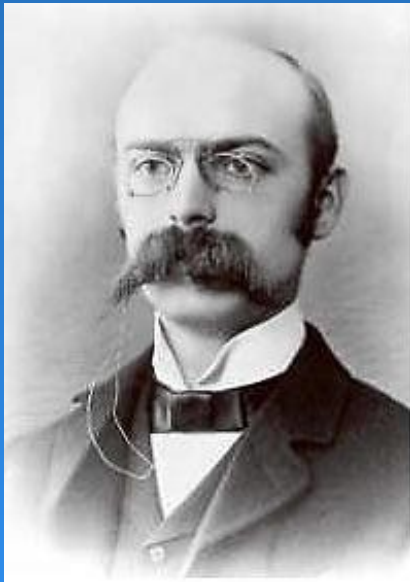
1. Wstęp
2. Zagadnienie Proste rozchodzenia się fal Love'a w falowodzie sprężystym obciążonym cieczą lepką
3. Zespolone równanie dyspersyjne
4. Zagadnienie Odwrotne dla fali Love'a rozchodzącej się w falowodzie sprężystym obciążonym cieczą lepką
5. Sformułowanie Zagadnienia Odwrotnego jako Problemu Optymalizacyjnego
6. Funkcja celu
7. Obliczenia numeryczne fala Love'a w falowodzie Cu na stali + ciecz lepka
8. Podsumowanie i Wnioski
9. Przyszłe prace

Wstęp

Celem pracy jest rozwiązanie Zagadnienia Odwrotnego dla fali Love'a

Co to są fale Love'a ?

Są to poprzeczne fale powierzchniowe typu SH (Shear Horizontal). Zaobserwowano je podczas trzęsień Ziemi.



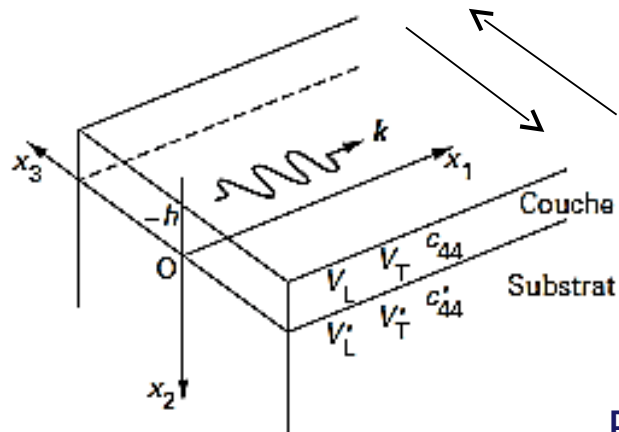
Stosowane są także w czujnikach właściwości fizyko-chemicznych cieczy

Augustus Edward Hough Love (1863 – 1940)

- Teoria fal Love'a – 1911 r. „Some Problems of Geodynamics”
- Adams Prize (Faculty of Mathematics at the University of Cambridge)

Fale Love'a :

- Przemieszczenie mechaniczne. (Fale dyspersyjne)
- Zakres częstotliwości od 0.001 Hz do 500 MHz



Rys.1

Poprzeczna fala powierzchniowa nie istnieje w jednorodnej półprzestrzeni sprężystej

Równanie – fala Love'a

Równanie Schrodingera

Równanie - światłowód planarny

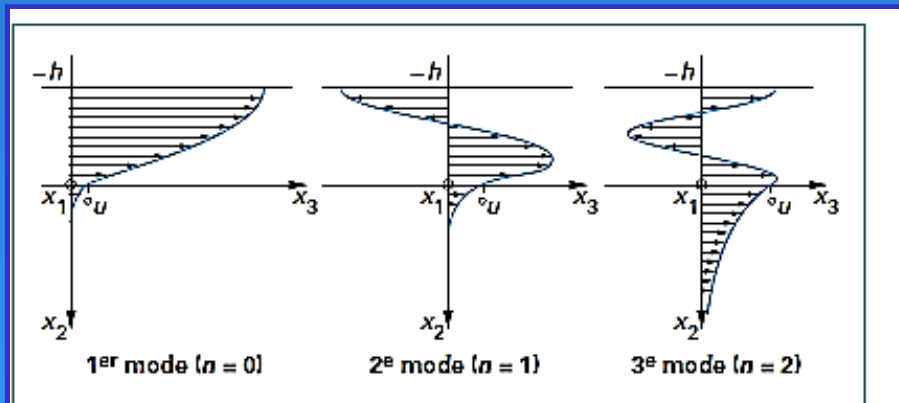


Figure 17 – Onde de Love : amplitude du déplacement en fonction de la profondeur pour le couple silice/silicium

Rys.2

Zagadnienie Proste

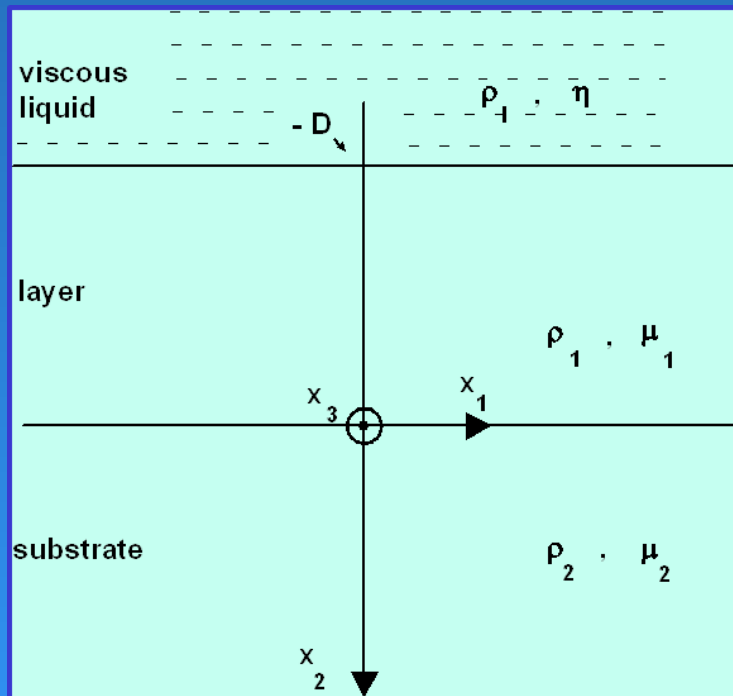
- Określenie skutków (results, outputs) na podstawie znajomości przyczyny (inputs).
- Aby rozwiązać Problem Prosty (wyznaczenie rozkładu wielkości u) niezbędna jest znajomość następujących informacji:
 - a) Dziedzina Ω z brzegiem Γ , gdzie u jest zdefiniowane
 - b) Równanie rządzące zmianami wielkości u :
 $L(\text{wsp})u = f$; $L = \text{operator}$, $\text{wsp} = \text{parametry materiałowe}$,
 $f = \text{siła lub źródło}$
 - c) Warunki brzegowe na brzegu Γ , lub warunki początkowe (jeżeli niezbędne)
 - d) Siła lub źródło f zdefiniowane w dziedzinie Ω
 - e) rozkład parametrów materiałowych (wsp)
- Jeżeli chociaż jedna z powyższych informacji nie jest określona, to Problem Prosty nie może być rozwiązany.

Zagadnienie Odwrotne

- Określenie przyczyny (inputs, źródeł) ze znajomości (z pomiarów) skutków (results, outputs).
- Problemem Odwrotnym jest ten, który nie jest Problemem Prostym.
- Wyróżnić możemy następujące rodzaje Problemów Odwrotnych:
 - a) Wyznaczenie kształtu dziedziny Ω lub jej brzegu Γ (domain/boundary Inverse Problem)
 - b) Określenie postaci równania (governing equation Inverse Problem)
 - c) Wyznaczenie warunków brzegowych lub początkowych (boundary value/initial value Inverse Problem)
 - d) Wyznaczenie siły lub źródła f działającego w Ω (force/source Inverse Problem)
 - e) Wyznaczenie nieznanymi właściwościami materiałowymi (wsp) określonych na Ω (material properties Inverse Problem)

Zagadnienie Proste dla fali Love'a

- Zagadnienie Proste dla fali Love'a rozchodzącej się w warstwowym falowodzie sprężystym pokrytym na powierzchni cieczą lepką polega na wyznaczeniu prędkości fazowej oraz tłumienia fali znając wszystkie parametry materiałowe falowodu oraz cieczy dla ustalonej częstotliwości.



Parametry materiałowe



Prędkość i tłumienie fali

Rys.3 Falowód fali Love'a pokryty cieczą lepką

Założenia:

1. Rozpatrujemy pierwszy mod (rodzaj drgań) fal Love'a
2. Podłoże i warstwa są ośrodkami: sprężystymi, izotropowymi, jednorodnymi oraz bezstratnymi
3. Powierzchnia falowodu obciążona jest nieściśliwą cieczą Newtonowską (lepka)
4. Brak zmienności wzdłuż osi x_3
5. Równanie Naviera-Stokesa jest zlinearyzowane
6. Straty wprowadza tylko obecność cieczy

Model Matematyczny:

Poszukujemy następującą postać
przemieszczenia fali Love'a :

$$u_3(x_1, x_2, t) = f(x_2) \cdot \exp[j(k \cdot x_1 - \omega t)]$$

$k = k_0 + j\alpha$ = Zespólona liczba falowa fali Love'a

Równania ruchu:

- a) w ciałach stałych = równanie ruchu ciała sprężystego
- b) w cieczy = równanie Naviera-Stokesa

Warunki brzegowe (na granicach ośrodków):

- a) ciągłość przemieszczeń
- b) ciągłość naprężeń ścinających

Zespolone równanie dyspersyjne

Postać analityczna

$$\sin(qD) \cdot \{(\mu_1)^2 \cdot q^2 + \mu_2 \cdot b \cdot \lambda_1 \cdot j\omega\eta\} - \cos(qD) \cdot \{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot b \cdot q - \mu_1 \cdot q \cdot \lambda_1 \cdot j\omega\eta\} = 0$$

$$\Omega = A + jB = 0 \quad (1)$$

Wielkości q , b oraz λ_1 są zespolone

$$q = (k_1^2 - k^2)^{1/2} \quad ; \quad b = (k^2 - k_2^2)^{1/2} \quad ; \quad \lambda_1 = \left(k^2 - j\omega \frac{\rho_l}{\eta}\right)^{1/2} \quad ; \quad k = k_0 + j\alpha$$

Równanie (1) składa się z dwóch równań: 1) $\text{Re}(1) = A = 0$
2) $\text{Im}(1) = B = 0$

Niewiadomymi są: k_0 oraz α (procedura numeryczna).

Po rozseparowaniu części rzeczywistej i urojonej równania dyspersyjnego (1) otrzymujemy:

$$A(\mu_1, \rho_1, \mu_2, \rho_2, \eta, \rho_l, D, \omega; k_0, \alpha) = 0 \quad (2)$$

$$B(\mu_1, \rho_1, \mu_2, \rho_2, \eta, \rho_l, D, \omega; k_0, \alpha) = 0 \quad (3)$$

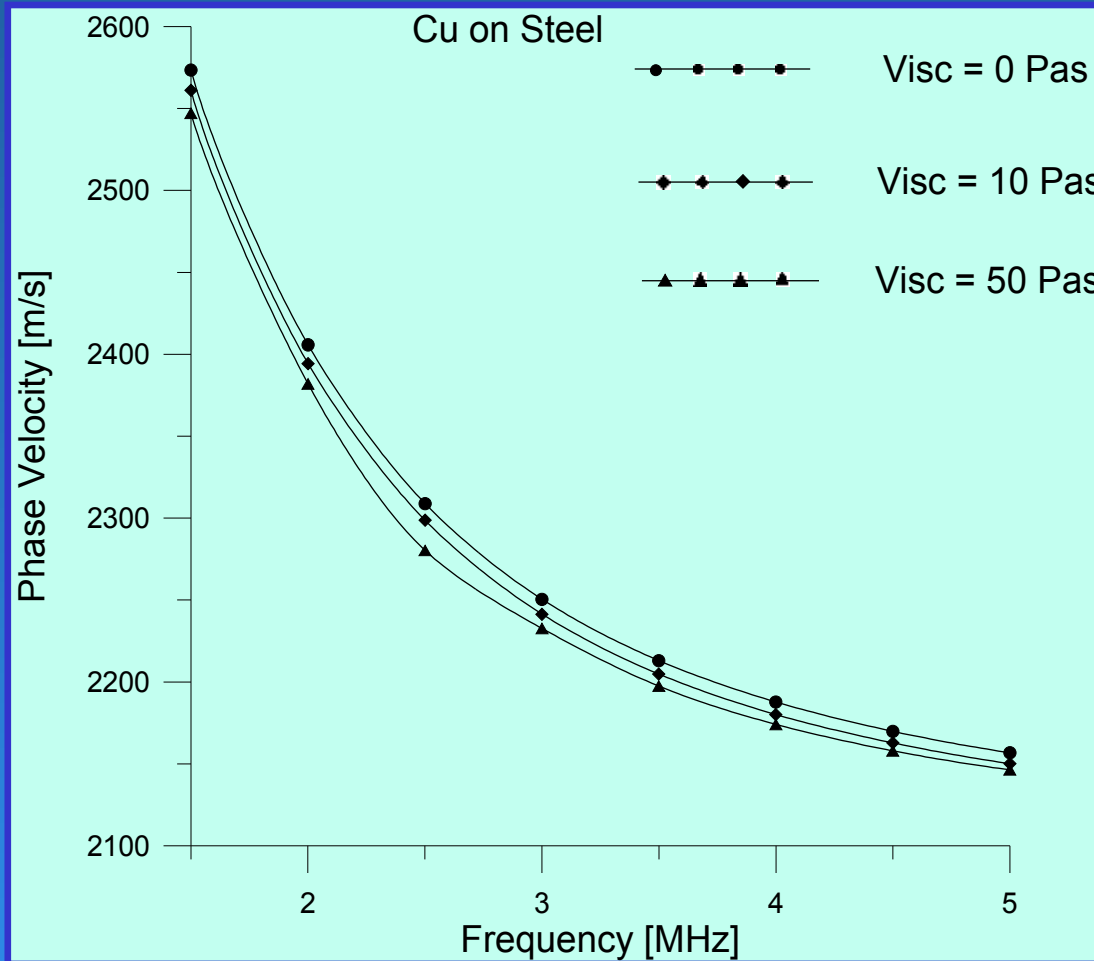
Wielkości: $\mu_1, \rho_1, \mu_2, \rho_2, \eta, \rho_l, D, \omega$ są parametrami

Jest to układ (2-3) dwóch nieliniowych równań algebraicznych, w których niewiadomymi są: k_0 oraz α .

$v = \omega/k_0$ - prędkość fazowa fali Love'a

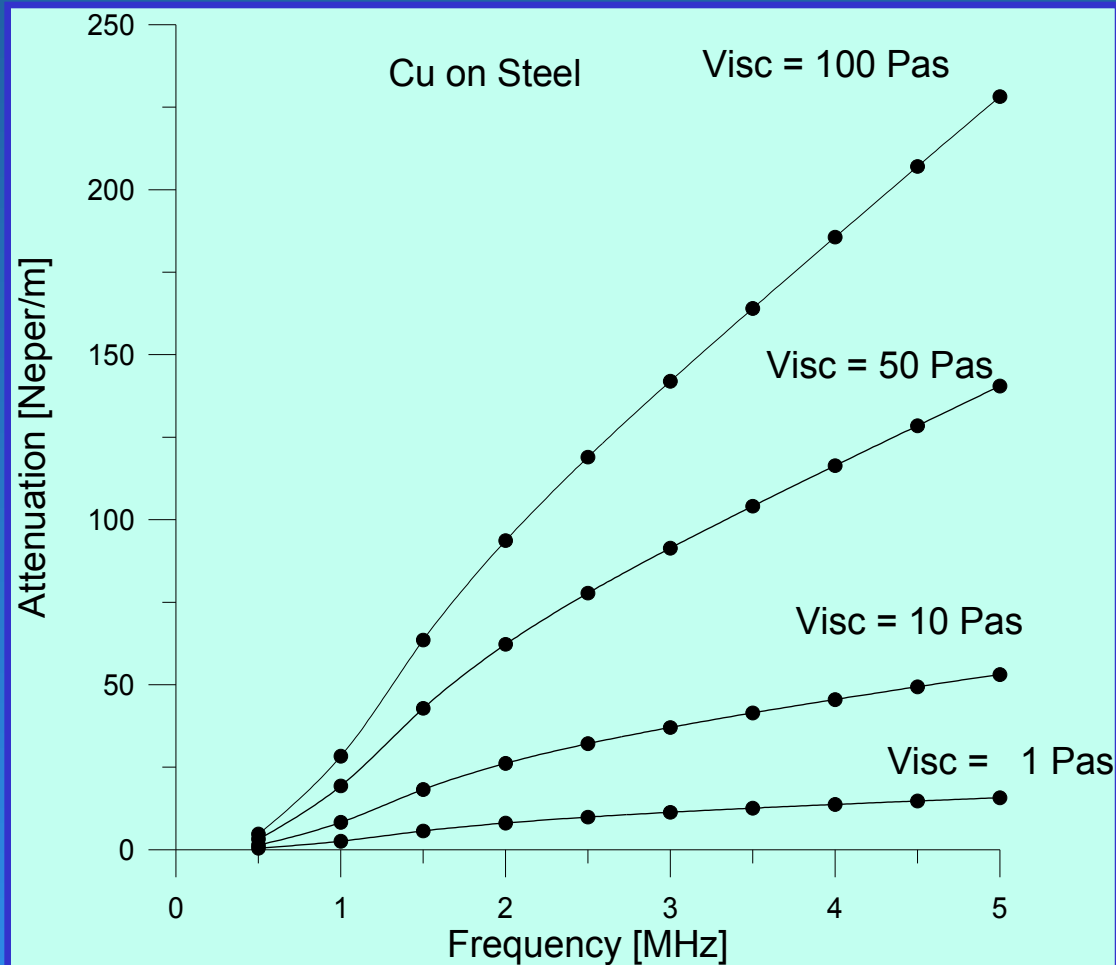
α - tłumienie fali Love'a w Np/m

Metoda Newtona: Program MATHCAD oraz SCILAB

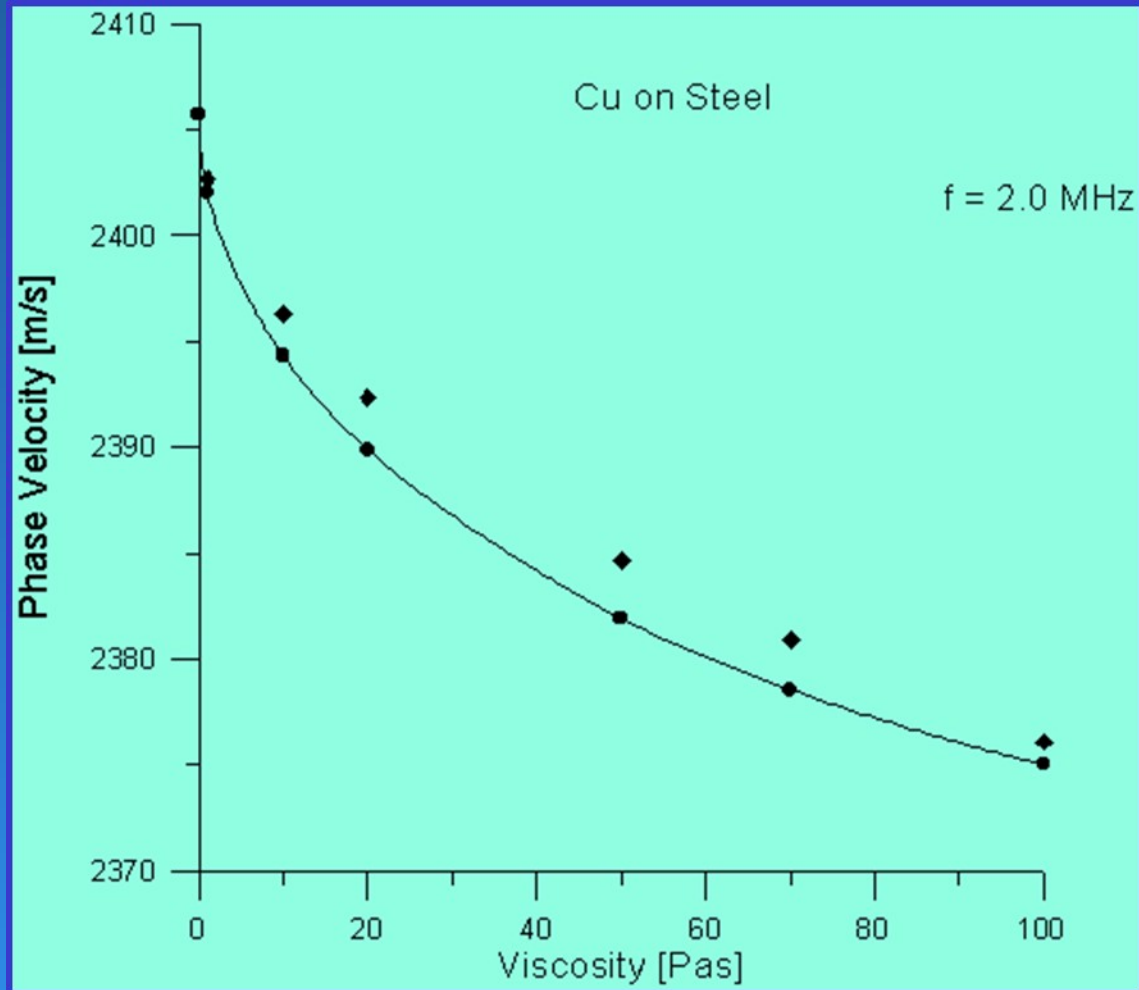


Rys.4. Obliczona prędkość fazowa fali Love'a w funkcji częstotliwości.

$$\eta = \text{const.}$$



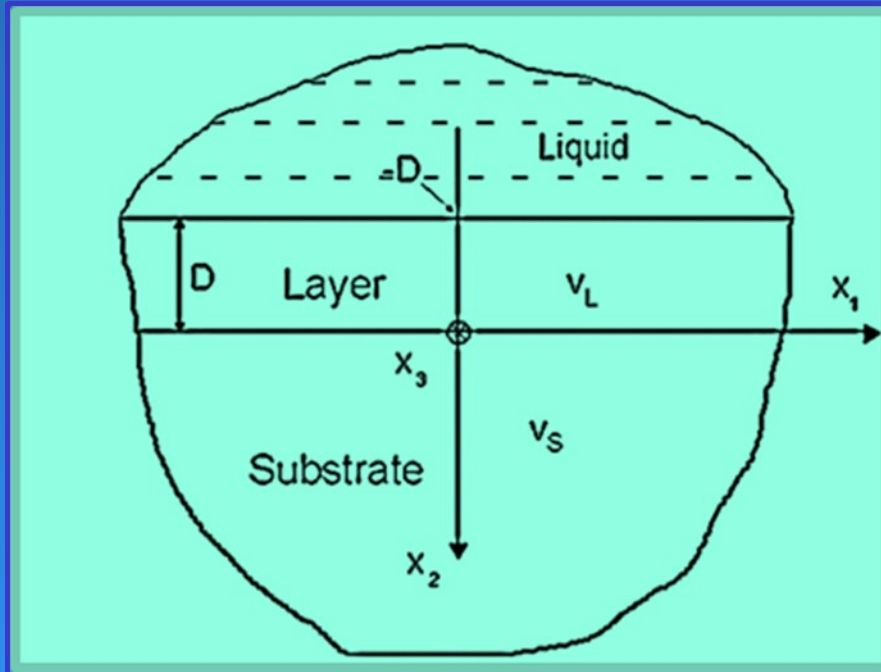
Rys.5. Obliczone tłumienie fali Love'a w funkcji częstotliwości dla $\eta = \text{const.}$



Rys.6. Obliczona prędkość fazowa fali Love'a w funkcji lepkości ($f = 2 \text{ MHz}$).

Zagadnienie Odwrotne dla fali Love'a

- Zagadnienie odwrotne polega na wyznaczeniu nieznanymi parametrów materiałowych (np. lepkości cieczy) ze znajomości zmierzonych krzywych dyspersji prędkości fazowej i tłumienia powierzchniowych fal Love'a rozchodzących się w rozpatrywanym falowodzie.



Krzywe dyspersji



Parametry materiałowe

Rys.7 Falowód fali Love'a pokryty cieczą lepką

- W tej pracy Zagadnienie Odwrotne sformułowano oraz rozwiązano jako Zagadnienie Optymalizacyjne z odpowiednią sformułowaną funkcją celu

Kroki w Postępowaniu Odwrotnym

- Aby rozwiązać Zagadnienie Odwrotne należy wykonać następujące trzy kroki:

1) Sformułowanie i rozwiązanie Zagadnienia Prostego

2) Przeprowadzenie eksperymentu (numerycznego). Dane syntetyczne.
Pomiar krzywych dyspersji fal Love'a

3) Sformułowanie i rozwiązanie Zagadnienia Odwrotnego:

a) Zagadnienie odwrotne formułujemy jako Zagadnienie Optymalizacyjne

b) określenie funkcji celu $\Pi(\eta)$

c) zastosowanie procedury minimalizacyjnej

$$\min_{\eta} \Pi(\eta) \Leftrightarrow \eta$$

Funkcja celu

- Mamy pewną dowolność przy wyborze funkcji celu $\Pi(\eta)$:
- Równanie dyspersyjne: $\Omega = A + jB = 0$

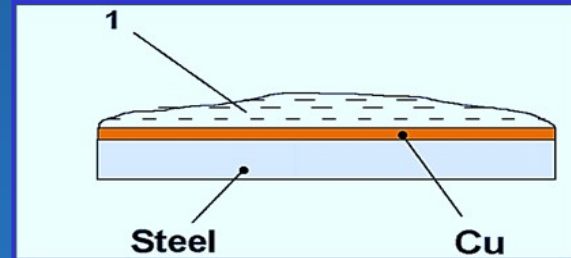
1)
$$\Pi(\eta) = \sum_{j=1}^{N_e} \{ A^2(\text{par}, \omega_j, k_0^j, \alpha_j, \eta) + B^2(\text{par}, \omega_j, k_0^j, \alpha_j, \eta) \}$$

2)
$$\Pi(\eta) = \sum_{j=1}^{N_e} \sqrt{A^2 + B^2}$$

3)
$$\Pi(\eta) = \sum_{j=1}^{N_e} |A| + |B|$$

Obliczenia numeryczne

Falowod Cu na stali



Dane materiałowe

Dla miedzi (Cu)

$$\mu_1 = 3.91 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\rho_1 = 8.9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$v_1 = (\mu_1/\rho_1)^{1/2} = 2096 \text{ m/s}$$

Grubość warstwy Cu: $D = 0.4 \text{ mm}$

Gęstość cieczy = $1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$;

Dla stali

$$\mu_2 = 8.02 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$$

$$\rho_2 = 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$v_2 = (\mu_2/\rho_2)^{1/2} = 3206.5 \text{ m/s}$$

Program Mathcad oraz Scilab

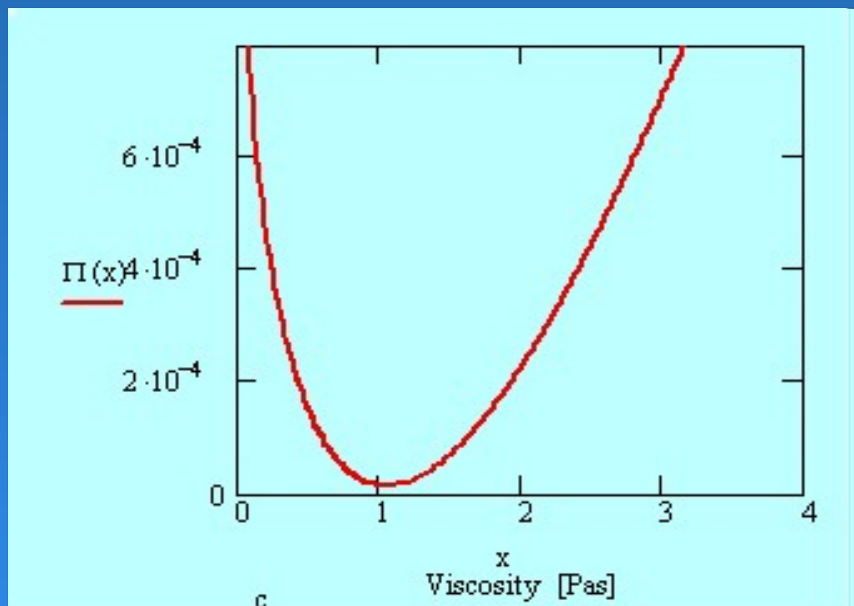
Dane Syntetyczne

(Eksperyment Numeryczny)

- Sprawdzenie poprawności Metody Odwrotnej (Postępowanie standardowe w mechanice)
- Krzywe dyspersji prędkości fazowej oraz tłumienia fali Love'a wyznaczono numerycznie dla lepkości cieczy $\eta = 1 \text{ Pas}$.
- Krzywe te traktujemy jako krzywe dokładne.
- Następnie dodajemy do tych krzywych błąd przypadkowy o określonym poziomie np. 1% (generator liczb losowych).
- Otrzymane w ten sposób krzywe traktujemy jako symulację krzywych eksperymentalnych.
- Krzywe dyspersji obliczono oraz poddano procesowi zaburzenia (contamination) szumami dla 5 wartości częstotliwości.
- $f = 1 \text{ MHz}, 1.5 \text{ MHz}, 2.0 \text{ MHz}, 2.5 \text{ MHz}$ oraz 3 MHz .

Wyniki obliczeń numerycznych

- Zastosowano procedury optymalizacyjne do wyznaczenia minimum funkcji celu $\Pi(\eta)$



Rys.8. Zależność funkcji celu $\Pi(\eta)$ od lepkości cieczy η dla wartości maksymalnego błędu przypadkowego = 0.5%

Wyniki obliczeń numerycznych

- Minimalizacja funkcji celu prowadzi do następujących wartości nieznannej lepkości cieczy:

Calculation No	1	2	3	4	5	6	7	8	average	error
Viscosity [Pa s]	0.822	0.957	0.815	1.035	1.19	1.035	1.242	0.992	1.12	12%

- Tabela I. Lepkość cieczy określona z Metody Odwrotnej. Maksymalny błąd przypadkowy (maximal random error) = 0.5%

Calculation No	1	2	3	4	5	6	7	8	average	error
Viscosity [Pa s]	0.911	1.044	1.018	0.929	0.993	1.023	1.075	1.028	1.045	4.5%

- Tabela II. Lepkość cieczy określona z Metody Odwrotnej. Maksymalny błąd przypadkowy (maximal random error) = 0.1%

Podsumowanie

- Sformułowano i rozwiązano Zagadnienie Proste dotyczące rozchodzenia się fali Love'a w falowodzie sprężystym obciążonym na powierzchni cieczą lepka
- Wyprowadzono wzór analityczny na zespolone równanie dyspersyjne dla fali Love'a rozchodzącej się w rozpatrywanej strukturze
- Sformułowano i rozwiązano Zagadnienie Odwrotne
- Zagadnienie Odwrotne sformułowano jako Zagadnienie Optymalizacyjne
- Skonstruowano odpowiednią funkcję celu $\Pi(\eta)$
- Wyznaczono minimum funkcji celu $\Pi(\eta)$
- Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla fal Love'a rozchodzących się w falowodzie miedź na stali + ciecz lepka

Wnioski

- Wyniki badań pokazują, że fale Love'a mogą być z powodzeniem wykorzystane do pomiarów nieznanej lepkości cieczy
- Opracowano nową Metodę Odwrotną do wyznaczania lepkości cieczy korzystając z krzywych dyspersji prędkości oraz tłumienia powierzchniowej fali Love'a
- Rozwiązanie Zagadnienia Odwrotnego prowadzi do wyznaczenia (poszukiwanej) wartości lepkości cieczy η
- Otrzymane wyniki badań mogą znaleźć zastosowanie w: geofizyce, sejsmologii, w badaniach trzęsień Ziemi, w projektowaniu sensorów lepkości cieczy oraz badaniach nieniszczących (NDT) materiałów

Przyszłe Prace

- Zagadnienie Odwrotne
- Wyznaczyć nieznaną lepkość cieczy lepkiej obciążającej powierzchnię falowodu.
Wybór innej funkcji celu np.:

$$\Pi(\eta) = \sum_{j=1}^N \left\{ \left(\frac{v_j^m - v^{th}}{v_j^m} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_j^m - \alpha^{th}}{\alpha_j^m} \right)^2 \right\}$$

- Wyznaczanie innych parametrów cieczy lepkiej np.:
Lepkości η oraz gęstości cieczy ρ jednocześnie
- Wyznaczanie parametrów reologicznych cieczy lepkością sprężystą:
 $G = \mu + j\omega\eta$

Spis Literatary

1. P. Kielczyński, M. Szalewski, A. Balcerzak, „*Effect of a viscous liquid loading on Love wave propagation*”, International Journal of Solids and Structures, 49 (2012) 2314-2319. (40 pkt)
2. Boxberger, T., Picozzi, M., Parolai, S., *Shallow geology characterization using Rayleigh and Love wave dispersion curves derived from seismic noise array measurements*, Journal of Applied Geophysics 75, 345-354, (2011).
3. Fukao, Y., Abe, K., *Multi-mode Love wave excited by shallow and deep earthquakes*, Bulletin of the Earthquake Research Institute 49, 1-12, (1971).
4. F.L. Guo, G.Q. Wang, G.A. Rogerson, „*Inverse determination of liquid viscosity by means of the Bleustein-Gulyaev wave*”, International Journal of Solids and Structures, 49 (2012) 2115-2120.
5. Du J.K., Xian K., Yong Y.K., „*SH-SAW propagation in layered functionally graded piezoelectric material structures loaded with viscous liquid*”, Acta Mechanica, 212 (2010), pp. 271-281.
6. G.R. Liu and X. Han, *Computational inverse techniques in nondestructive evaluation*, CRC Press, London, 2003, Ch.4.