ROZCHODZENIE SIĘ POWIERZCHNIOWYCH FAL LOVE'A W FALOWODACH SPREŻYSTYCH OBCIĄŻONYCH NA POWIERZCHNI CIECZĄ LEPKĄ (NEWTONOWSKĄ)

- Dr hab. Piotr Kiełczyński, prof. w IPPT PAN,
- Dr inż. Andrzej Balcerzak, Mgr inż. Marek Szalewski

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Zakład Teorii Ośrodków Ciągłych
Zespół Badawczy Akustoelektroniki

25 czerwca 2012 r., Warszawa, Polska.

PLAN SEMINARIUM

1. Wstęp
2. Cel pracy
3. Model fizyczny rozchodzenia się fal Love'a w falowodzie sprężystym obciążonym cieczą lepką
4. Model matematyczny zagadnienia
5. Zespolone równanie dyspersyjne
6. Separacja części urojonej i rzeczywistej równania dyspersyjnego
7. Rozwiązanie układu nieliniowych równań algebraicznych
8. Obliczenia numeryczne (krzywe dyspersji) dla falowodu Cu na stali + ciecz lepka
9. Podsumowanie
10. Przyszłe prace

Wstęp.

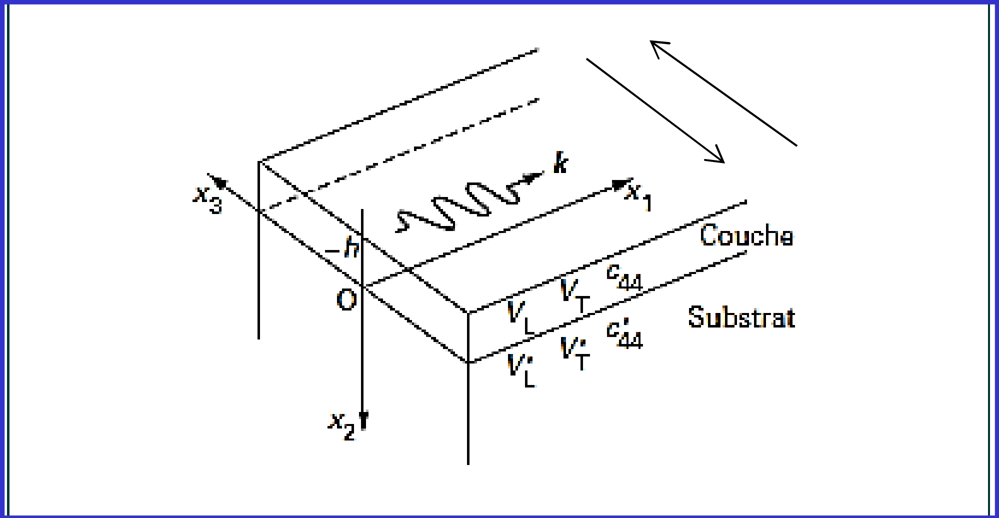
Co to są fale Love'a ?

Są to poprzeczne fale powierzchniowe typu SH (Shear Horizontal). Zaobserwowano je podczas trzęsień Ziemi.

- Augustus Edward Hough Love (1863 – 1940)
- Teoria fal Love'a – 1911 r. „Some Problems of Geodynamics"
- Adams Prize (Faculty of Mathematics at the University of Cambridge)

Fale Love'a :

- Przemieszczenie mechaniczne. (Fale dyspersyjne)
- Zakres częstotliwości od 0.001 Hz do 500 MHz



Poprzeczna fala powierzchniowa nie istnieje w jednorodnej półprzestrzeni spreżystej

Rys.1

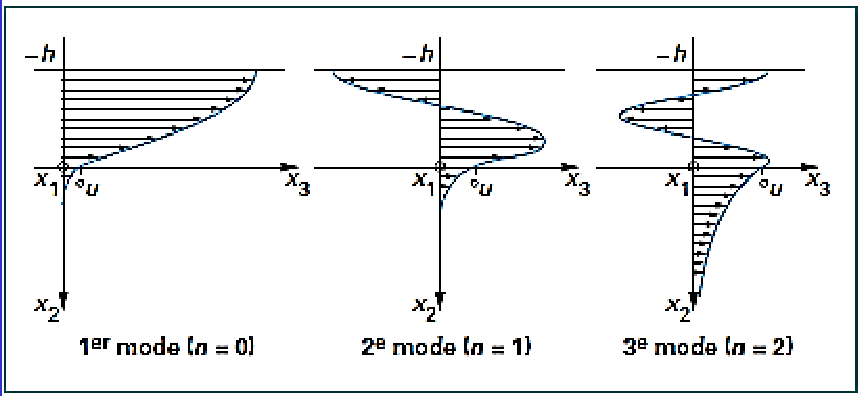


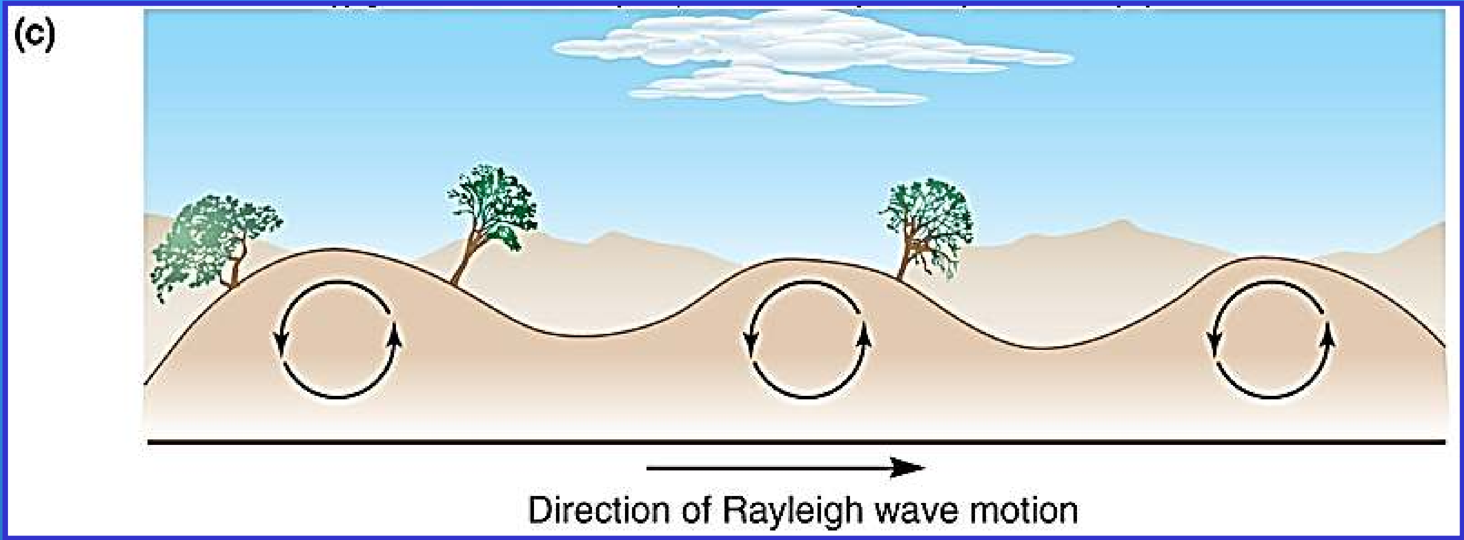
Figure 17 – Onde de Love : amplitude du déplacement en fonction de la profondeur pour le couple silice/silicium

Rys.2

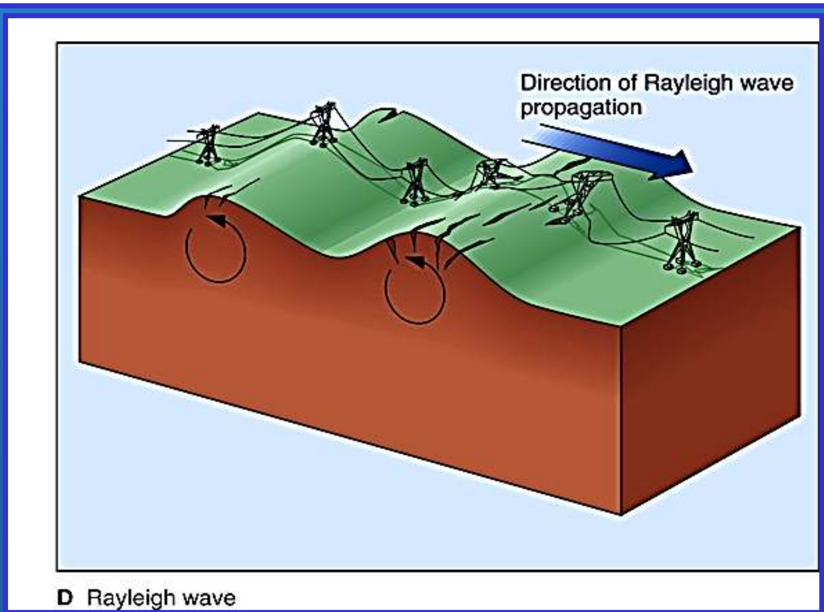
Fale Rayleigha (1885) :

Przemieszczenie mechaniczne. (Fale niedyspersyjne)

Obserwowane w trzęsieniach Ziemi. Zastosowania w sensorach



Rys.3

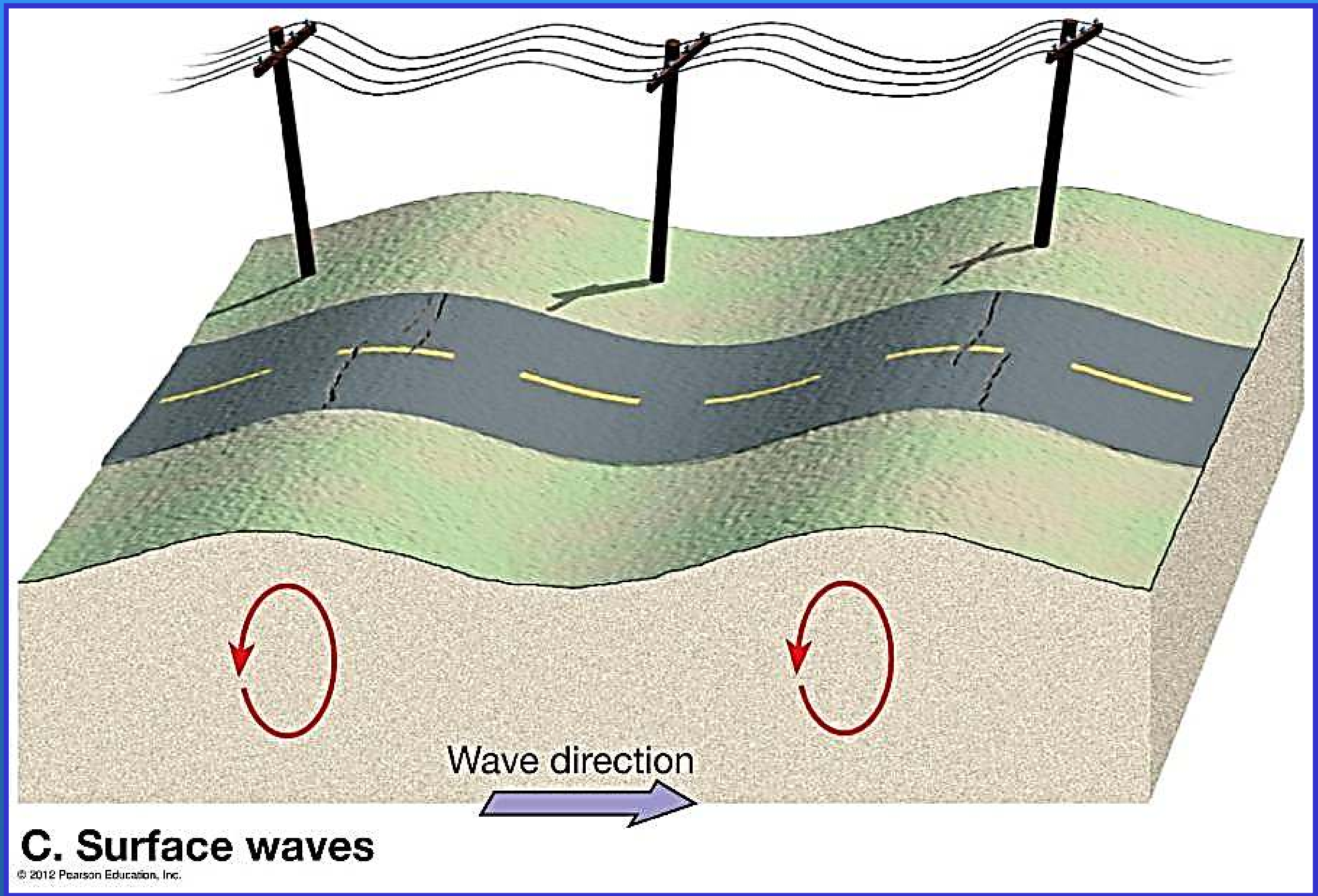


Rys.4

Skutki działania fali Rayleigha w trzęsieniach Ziemi

- Ruch cząstki po elipsie

Rys.5



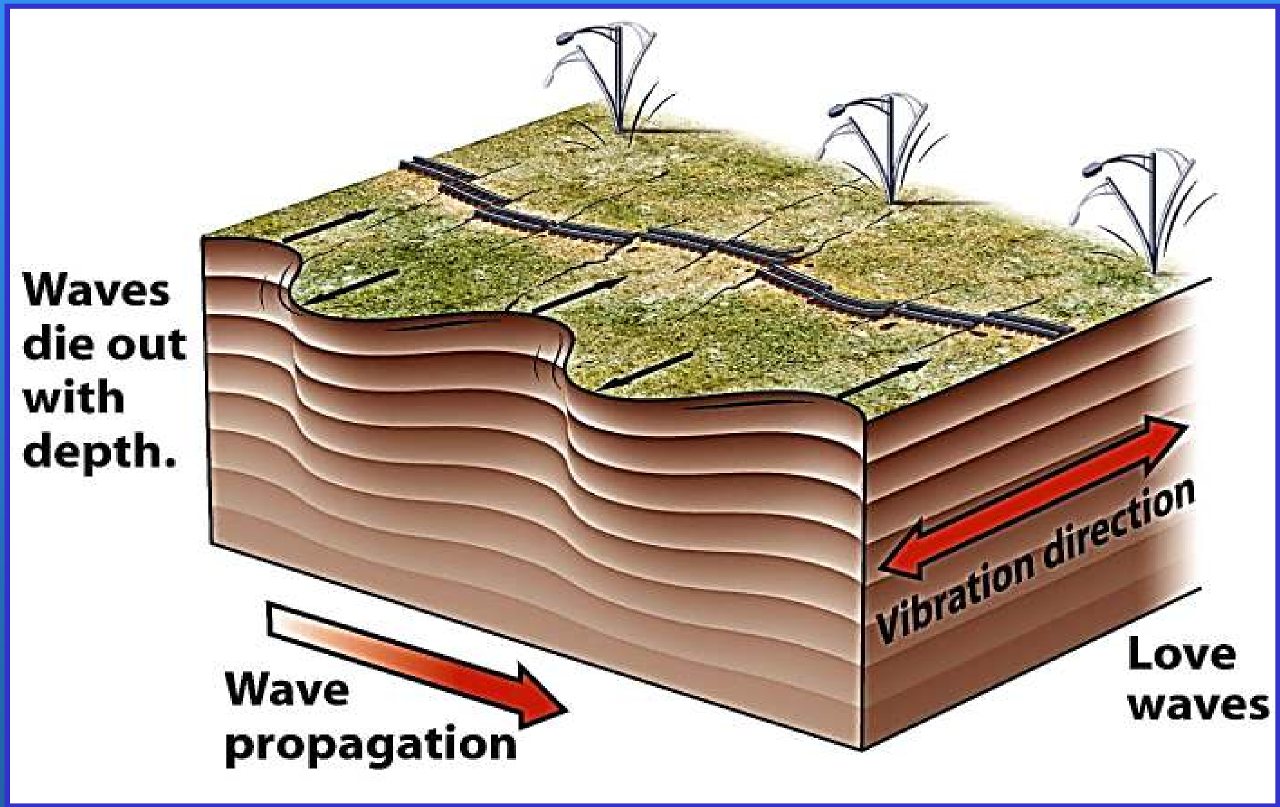
Skutki działania fali Love'a w trzęsieniach Ziemi

- Bardzo groźne dla budynków. Ścinanie fundamentów

Rys.6

Skutki działania fali Love'a w trzęsieniach Ziemi

Poziome ruchy gruntu



Rys.7

Przykład zastosowania fal Love'a w sensorach lepkości cieczy

Rys.8

Falowód fali Love'a.
Warstwa miedzi Cu
na podłożu stalowym.

f = 2 MHz

Grubość warstwy Cu = 0.4 mm

Długość falowodu = 6 cm

Rys.9

Postawienie zagadnienia
Cel pracy:
Rozwiązanie Zagadnienia Prostego.

Model fizyczny: $\boxed{k = k_0 + j\alpha}$ = Zespolona liczba falowa fali Love'a

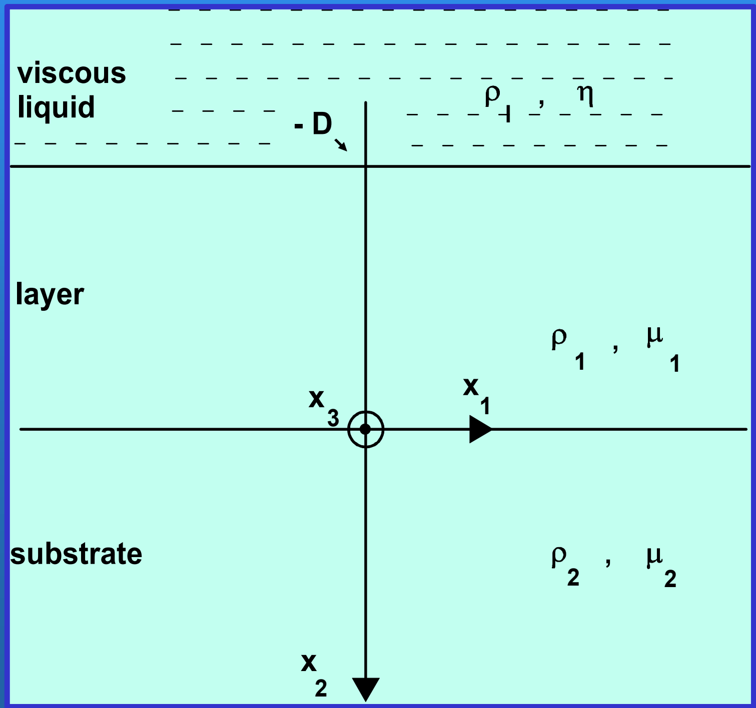
$\boxed{j = (-1)^{1/2}}$

Fala Love'a rozchodzi się w kierunku x_1

Przemieszczenie mechaniczne fali skierowane jest wzdłuż osi x_3

Powierzchnia falowodu $(x_2 = -D)$ obciążona jest cieczą lepką (Newtonowską)

Prędkość objętościowych fal ścinania w warstwie powierzchniowej $v_1 = (\mu_1/\rho_1)^{1/2}$ jest mniejsza od prędkości objętościowych fal ścinania w podłożu $v_2 = (\mu_2/\rho_2)^{1/2}$



Rys. 10.

Stan wiedzy

Nasza publikacja – 1989 – Rachunek zaburzeń

1. Kiełczyński, P., Płowiec, R., 1989. Determination of the shear impedance of viscoelastic liquids using Love and Bleustein-Gulyaev surface waves. Journal of the Acoustical society of America 86, 818-827.

$$\Delta\gamma = -j\left(\frac{\left|v_2\right|^2_{x_1=0}}{4P}\right)Z_L = -jKZ_L \qquad (1)$$

gdzie: K jest stałą zależną od tylko od właściwości materiałowych falowodu,

Z_L jest impedancją akustyczną cieczy, γ jest stałą propagacji fali Love'a

2. S Kim, J., 1992. The effect of a viscous fluid on Love waves in a layered media. Journal of the Acoustical Society of America 91, 3099-3103

Wyniki tej pracy są niekompletne

Założenia:

- 1. Rozpatrujemy pierwszy mod (rodzaj drgań) fal Love'a
- 2. Podłoże i warstwa są ośrodkami:
  sprężystymi, izotropowymi, jednorodnymi
  oraz bezstratnymi
- 3. Powierzchnia falowodu obciążona jest nieściśliwą
  cieczą Newtonowską (lepką)
- 4. Brak zmienności wzdłuż osi x_3
- 5. Równanie Naviera-Stokesa jest zlinearyzowane
- 6. Straty wprowadza tylko obecność cieczy

x_2

Model Matematyczny: Równania różniczkowe (ruchu)

W cieczy lepkiej (równanie Naviera-Stokesa) :

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} - \frac{\eta}{\rho_l}\left(\frac{\boldsymbol{\partial^2}}{\boldsymbol{\partial x_1^2}} + \frac{\boldsymbol{\partial^2}}{\partial x_2^2}\right) v_3 = 0 \qquad (2)$$

W warstwie powierzchniowej :

$$\frac{1}{v_1^2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \left(\frac{\boldsymbol{\partial^2}}{\boldsymbol{\partial x_1^2}} + \frac{\boldsymbol{\partial^2}}{\partial x_2^2}\right) u_3 \qquad (3)$$

W podłożu:

$$\frac{1}{v_2^2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) u_3 \qquad (4)$$

Postulujemy następującą postać fali Love'a:

$$u_3(x_1, x_2, t) = f(x_2) \cdot exp[j(k \cdot x_1 - \omega t)] \qquad (5)$$

Rozwiązania równań ruchu dla fali Love'a przyjmują postać:

W obszarze warstwy powierzchniowej: $(0 > x_2 > -D)$

Przemieszczenie mechaniczne fali: $u_3^{(1)} = W(x_2) \cdot exp[j(k \cdot x_1 - \omega t)]$ (6)

$$W''(x_2) - (k_1^2 - k_0^2) \cdot W(x_2) = 0 \qquad (7)$$

Postulujemy rozwiązanie w postaci: $W(x_2) = C_1 \cdot \sin(q \cdot x_2) + C_2 \cdot \cos(q \cdot x_2)$ (8)

gdzie: $q = (k_1^2 - k^2)^{1/2}$ $k_1 = \frac{\omega}{v_1}$; C_1 oraz C_2 są to dowolne stałe

Składowa naprężenia:

$$\tau_{23}^{(1)} = \mu_1 \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial x_2} = [C_1 \cdot \mu_1 \cdot q \cdot \cos(q \cdot x_2) - C_2 \cdot \mu_1 . q \cdot \sin(q \cdot x_2)] \cdot exp[j(kx_1 - \omega t)]$$

(9)

W podłożu: $(x_2 > 0)$

Przemieszczenie mechaniczne fali: $$u_3^{(2)} = U(x_2) \cdot exp[j(k \cdot x_1 - \omega t)] \quad (10)$$

$$U''(x_2) - (k^2 - k_2^2) \cdot U(x_2) = 0 \quad (11)$$

$$U(x_2) = C_3 \cdot exp(-b \cdot x_2) \quad (12)$$

gdzie: $b = (k^2 - k_2^2)^{1/2}$ $\quad k_2 = \frac{\omega}{v_2}$ $\quad Re(b) > 0$

C_3 jest dowolną stałą

Składowa naprężenia:

$$\tau_{23}^{(2)} = \mu_2 \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_2} = C_3 \mu_2 (-b) \cdot exp(-b \cdot x_2) \cdot exp[j(kx_1 - \omega t)] \quad (13)$$

W obszarze cieczy lepkiej: $(x_2 < -D)$

Prędkość drgań

$$v_3 = V(x_2) \cdot exp[j(k \cdot x_1 - \omega t)] \quad (14)$$

$$V''(x_2) - \left(k^2 - j\omega \frac{\rho_l}{\eta}\right) \cdot V(x_2) = 0 \quad (15)$$

$$V(x_2) = C_4 \cdot exp(\lambda_1 \cdot x_2)$$

gdzie: $\lambda_1 = \left(k^2 - j\omega \frac{\rho_l}{\eta}\right)^{1/2}$ $\quad Re(\lambda_1) > 0$ $\quad$ C_4 jest dowolną stałą

Składowa naprężenia:

$$\tau_{23}^{(l)} = \eta \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = C_4 \cdot \eta \cdot \lambda_1 \cdot exp(\lambda_1 \cdot x_2) \cdot exp[j(kx_1 - \omega t)] \quad (16)$$

Warunki brzegowe

1. Ciągłość przemieszczenia mechanicznego oraz naprężenia τ_{23} na granicy ciecz – sprężysta warstwa powierzchniowa: $\boxed{(x_2 = -D)}$

$$\boxed{\left.\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t}\right|_{x_2=-D} = \left.v_3\right|_{x_2=-D}} \quad (17)$$

$$\boxed{\left.\tau_{23}^{(1)}\right|_{x_2=-D} = \left.\tau_{23}^{(l)}\right|_{x_2=-D}} \quad (18)$$

2. Ciągłość przemieszczenia mechanicznego oraz naprężenia τ_{23} na granicy pomiędzy warstwą powierzchniową a podłożem: $\boxed{(x_2 = 0)}$

$$\boxed{\left.u_3^{(1)}\right|_{x_2=0} = \left.u_3^{(2)}\right|_{x_2=0}} \quad (19)$$

$$\boxed{\left.\tau_{23}^{(1)}\right|_{x_2=0} = \left.\tau_{23}^{(2)}\right|_{x_2=0}} \quad (20)$$

Zespolone równanie dyspersyjne

Podstawiając zależności na pola przemieszczeń (6), (10), (14) oraz naprężeń (9), (13), (16) do warunków brzegowych (17-20) otrzymujemy układ 4 równań liniowych i jednorodnych na 4 niewiadome stałe C_1, C_2, C_3 oraz C_4.

M = Macierz 4x4

$$[M] \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = 0 \qquad (21)$$

Warunkiem na to, aby istniało nietrywialne rozwiązanie tego układu równań jest zerowanie się wyznacznika macierzy M

$$\det [M] = 0 \qquad (22)$$

Zespolone równanie dyspersyjne
Postać analityczna

$$\sin(qD)\cdot\{(\mu_1)^2\cdot q^2+\mu_2\cdot b\cdot\lambda_1\cdot j\omega\eta\}-\cos(qD)\cdot\{\mu_1\cdot\mu_2\cdot b\cdot q-\mu_1\cdot q\cdot\lambda_1\cdot j\omega\eta\}=0 \qquad (23)$$

Wielkości q, b oraz λ_1 są zespolone

$$q=(k_1^2-k^2)^{1/2} \;;\quad b=(k^2-k_2^2)^{1/2} \;;\quad \lambda_1=\left(k^2-j\omega\frac{\rho_l}{\eta}\right)^{1/2} \;;\quad k=k_0+j\alpha$$

Równanie (22) składa się z dwóch równań: 1) Re(23) = 0
2) Im(23) = 0

Po rozseparowaniu części rzeczywistej i urojonej równania dyspersyjnego (22) otrzymujemy:

$$\boxed{A(\mu_1,\ \rho_1, \mu_2,\ \rho_2, \eta, \rho_l, D, \omega;\ k_0, \alpha) = 0} \qquad (24)$$

$$\boxed{B(\mu_1,\ \rho_1, \mu_2,\ \rho_2, \eta, \rho_l, D, \omega;\ k_0, \alpha) = 0} \qquad (25)$$

Wielkości: $\mu_1,\ \rho_1, \mu_2,\ \rho_2, \eta, \rho_l, D, \omega$ są parametrami

Jest to układ (24-25) dwóch nieliniowych równań algebraicznych, w których niewiadomymi są: k_0 oraz α.

$v = \omega / k_0$ - prędkość fazowa fali Love'a

α - tłumienie fali Love'a w Np/m

Metoda Newtona: Program MATHCAD oraz SCILAB

Obliczenia numeryczne

Dane materiałowe

Dla miedzi (Cu)

$\mu_1 = 3.91 \cdot 10^{10} \quad N/m^2$

$\rho_1 = 8.9 \cdot 10^3 \ kg/m^3$

$v_1 = (\mu_1/\rho_1)^{1/2} = 2096 \ m/s$

Dla stali

$\mu_2 = 8.02 \cdot 10^{10} \quad N/m^2$

$\rho_2 = 7.8 \cdot 10^3 \ kg/m^3$

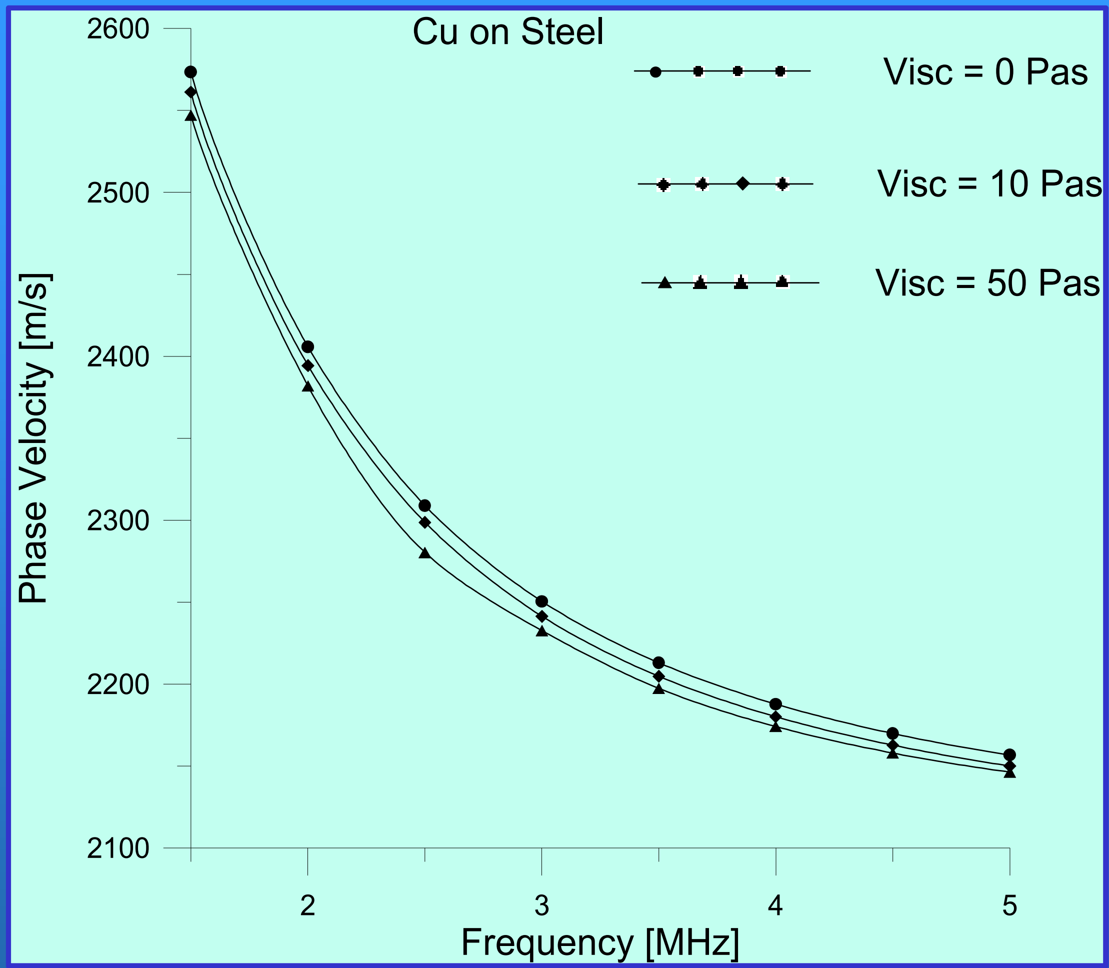
$v_2 = (\mu_2/\rho_2)^{1/2} = 3206.5 \ m/s$

Grubość D = 0.4 mm

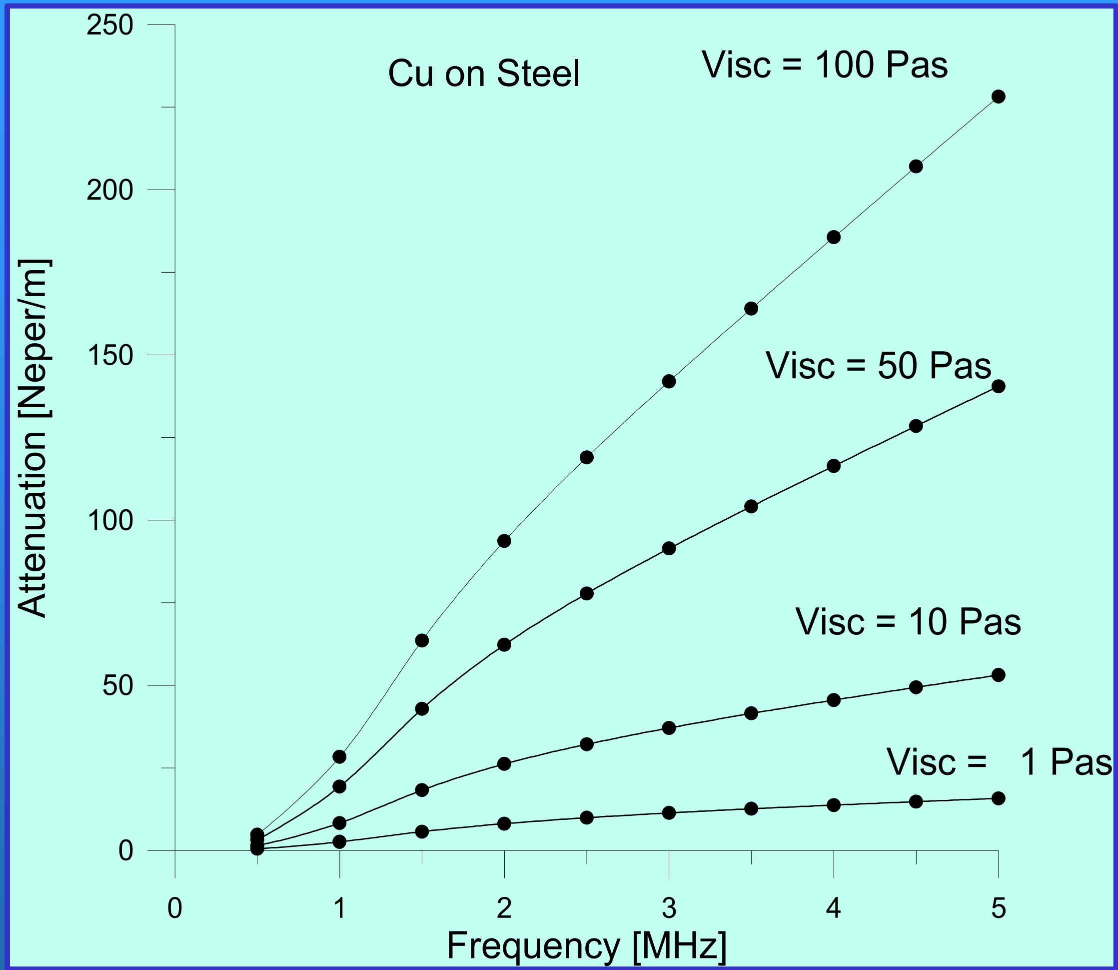
Gęstość cieczy = $1.0 \cdot 10^3 \ kg/m^3$;

Program Mathcad oraz Scilab

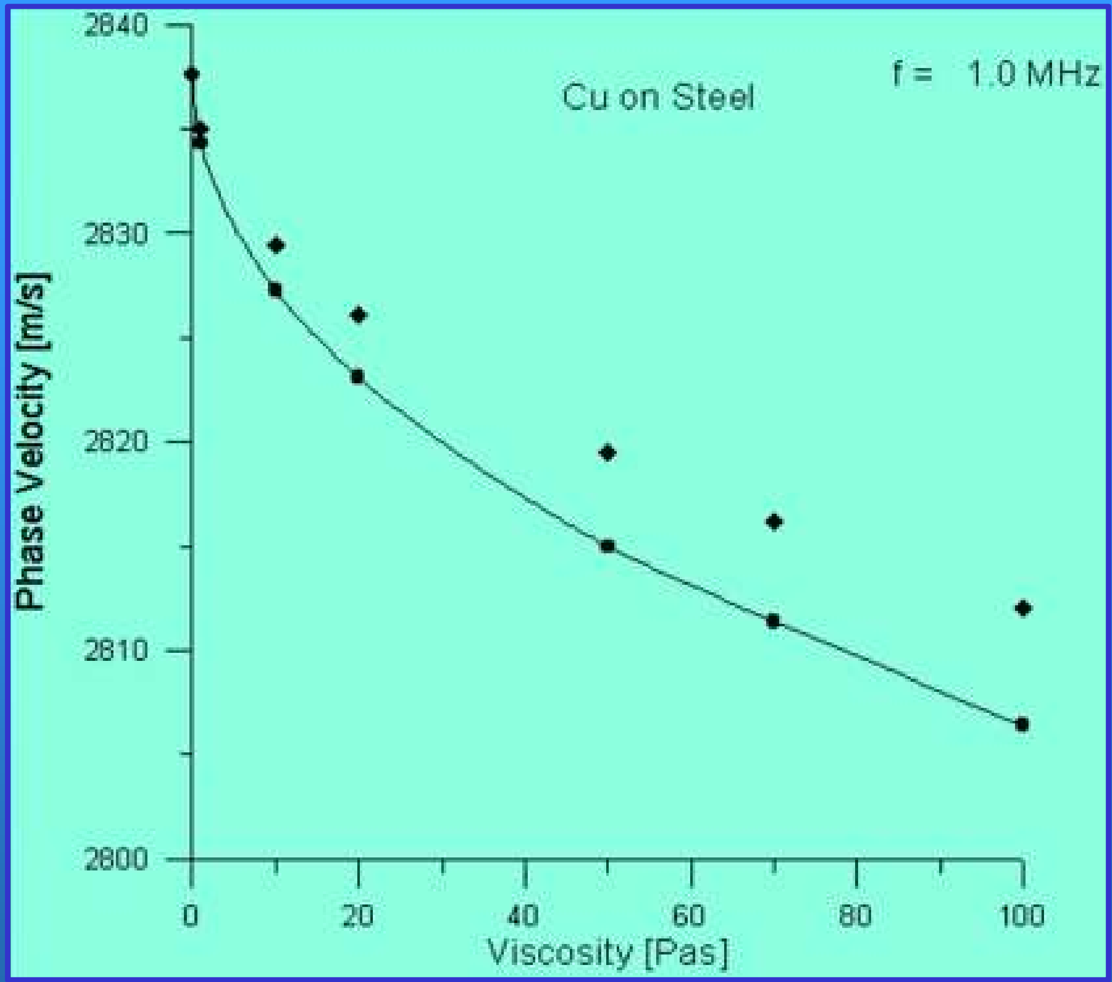
Obliczenia numeryczne przeprowadzono w zakresie:
1) f = 0.5 do 5 MHz
2) η = 0.1 do 100 Pa s



Rys.11. Prędkość fazowa fali Love’a w funkcji częstotliwości. η = const.



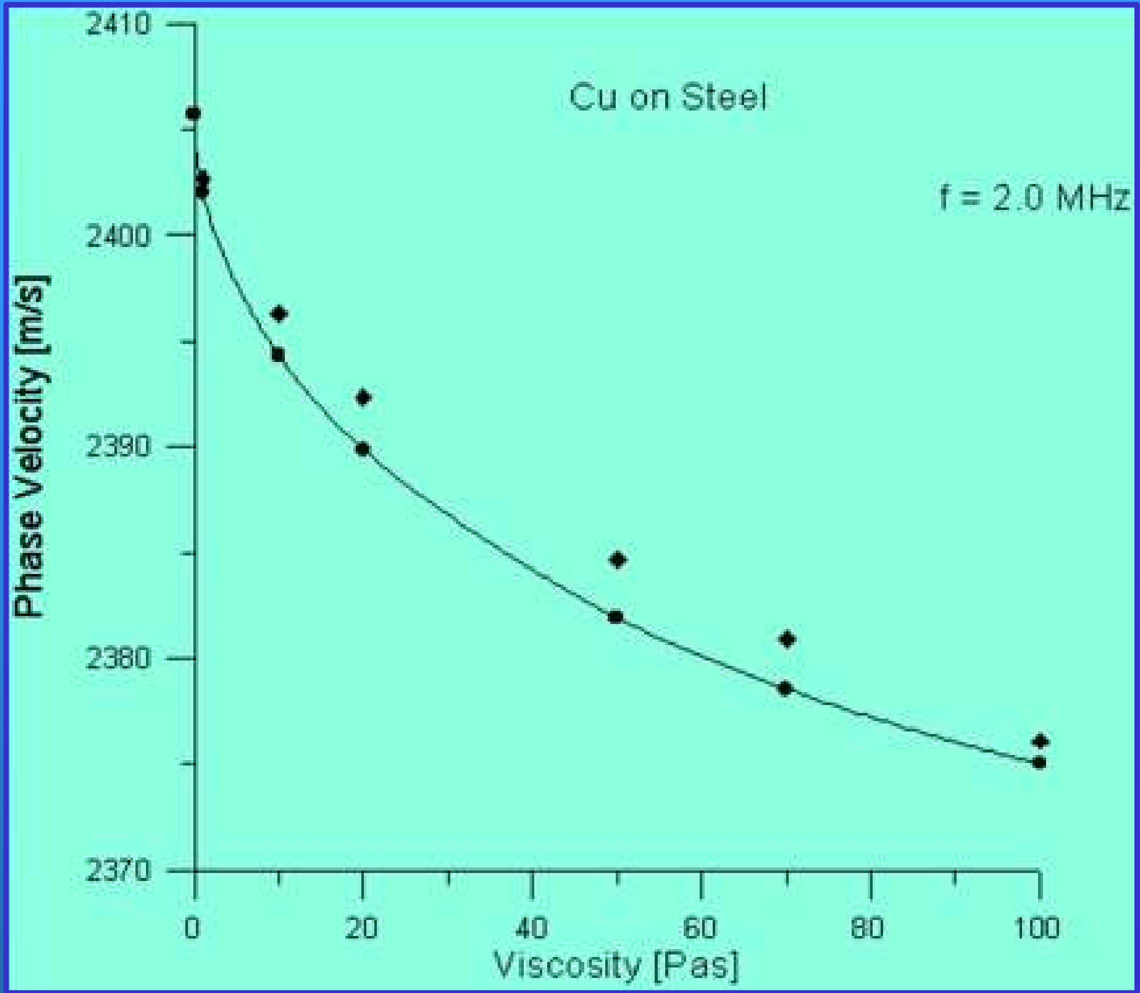
- Rys.12. Tłumienie fali Love'a w funkcji częstotliwości. η = const.



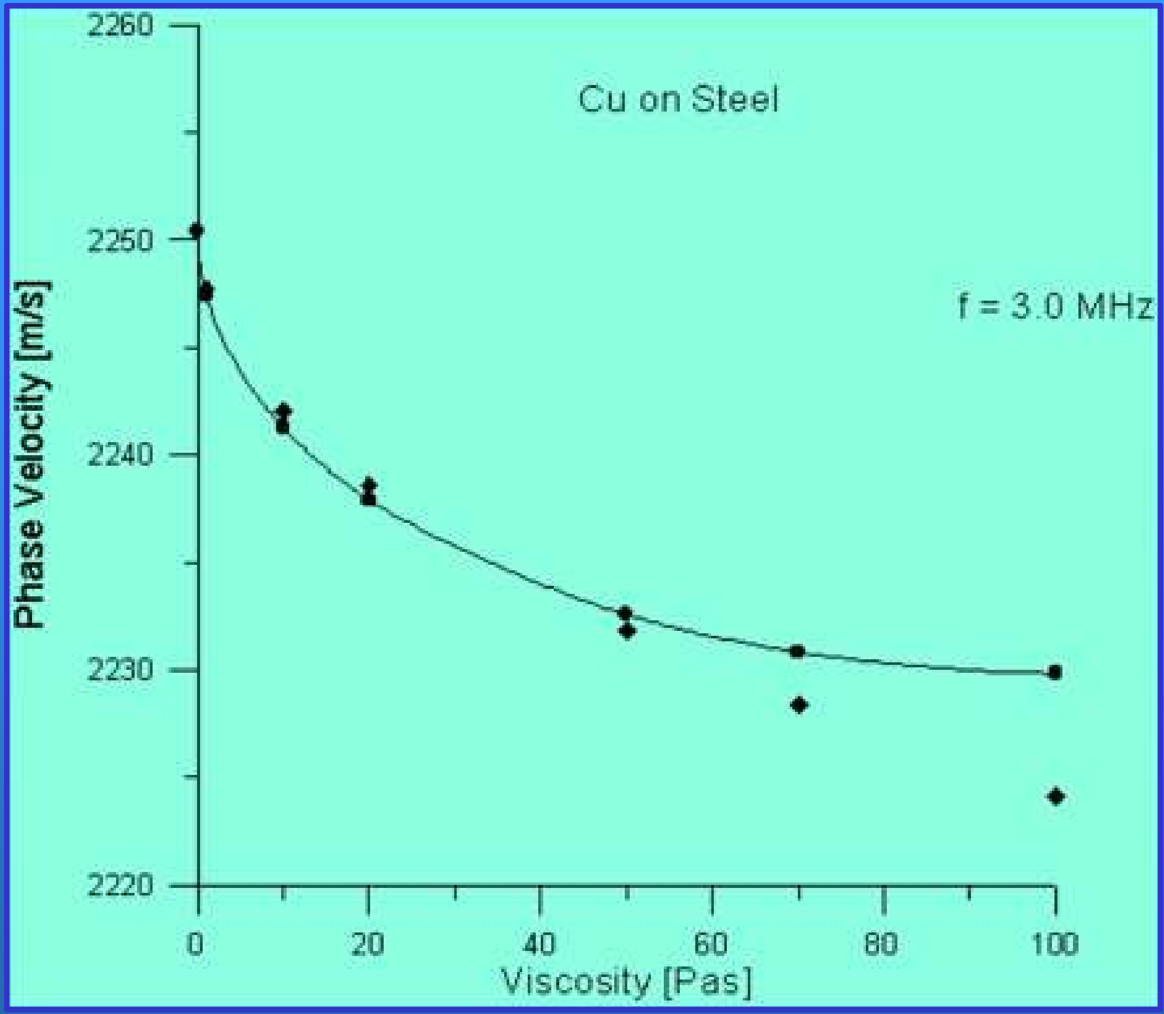
Rys.13. Prędkość fazowa fali Love'a w funkcji lepkości (f = 1 MHz).

Linia ciągła przedstawia prędkość fazową obliczoną ze wzorów (24-25).

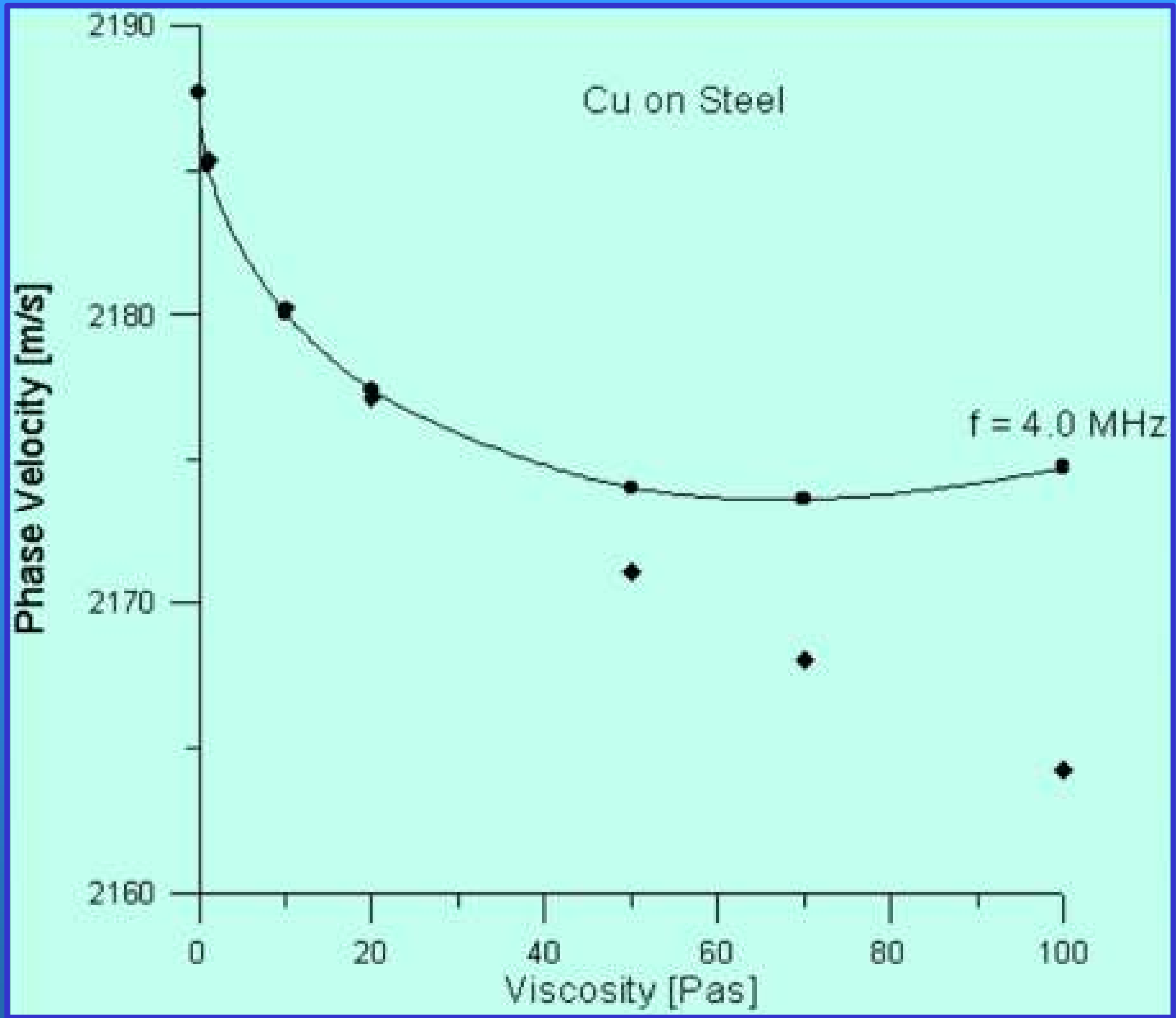
Romby oznaczają prędkość fazową obliczoną z rachunku zaburzeń (Równ.1).



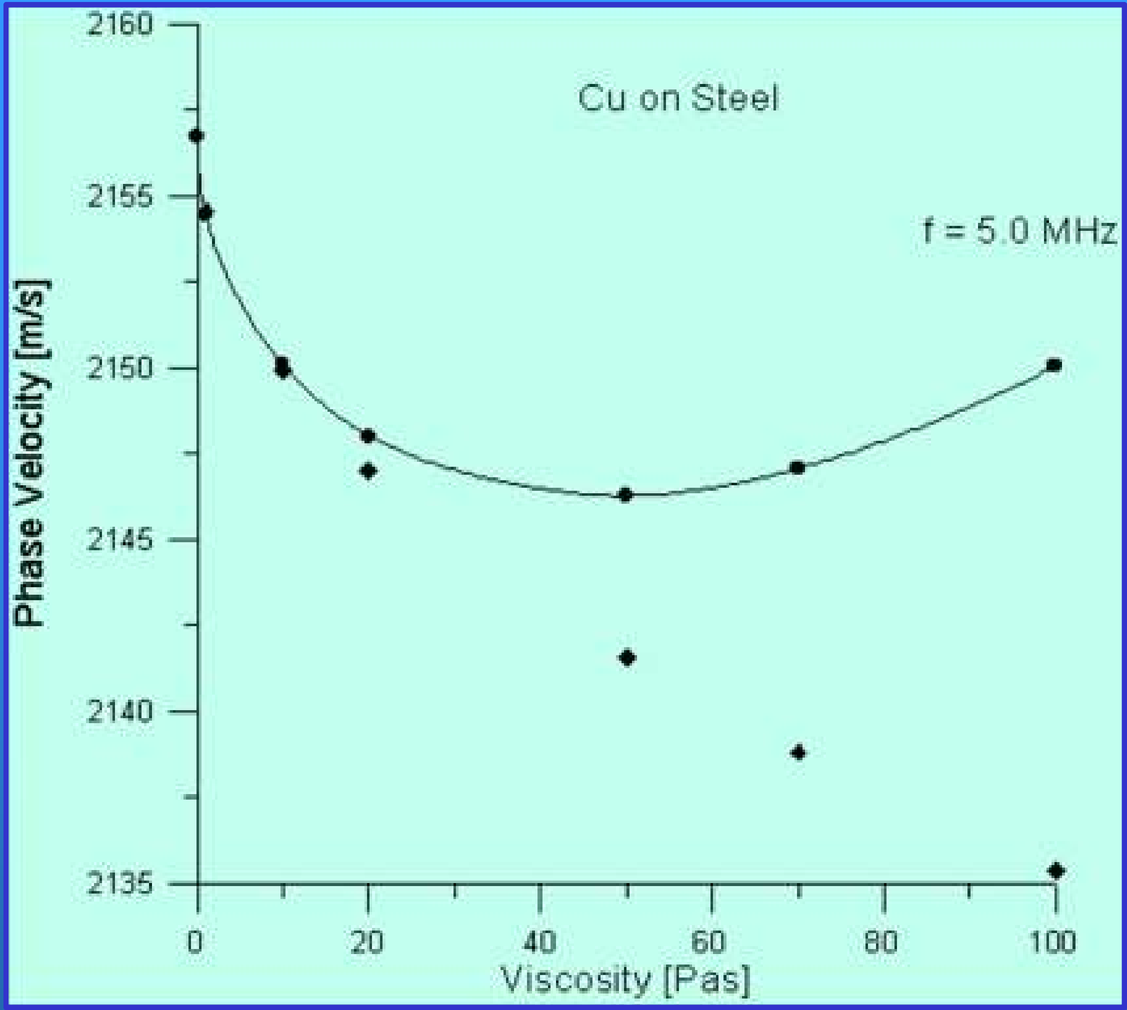
- Rys.14. Prędkość fazowa fali Love'a w funkcji lepkości (f = 2 MHz).



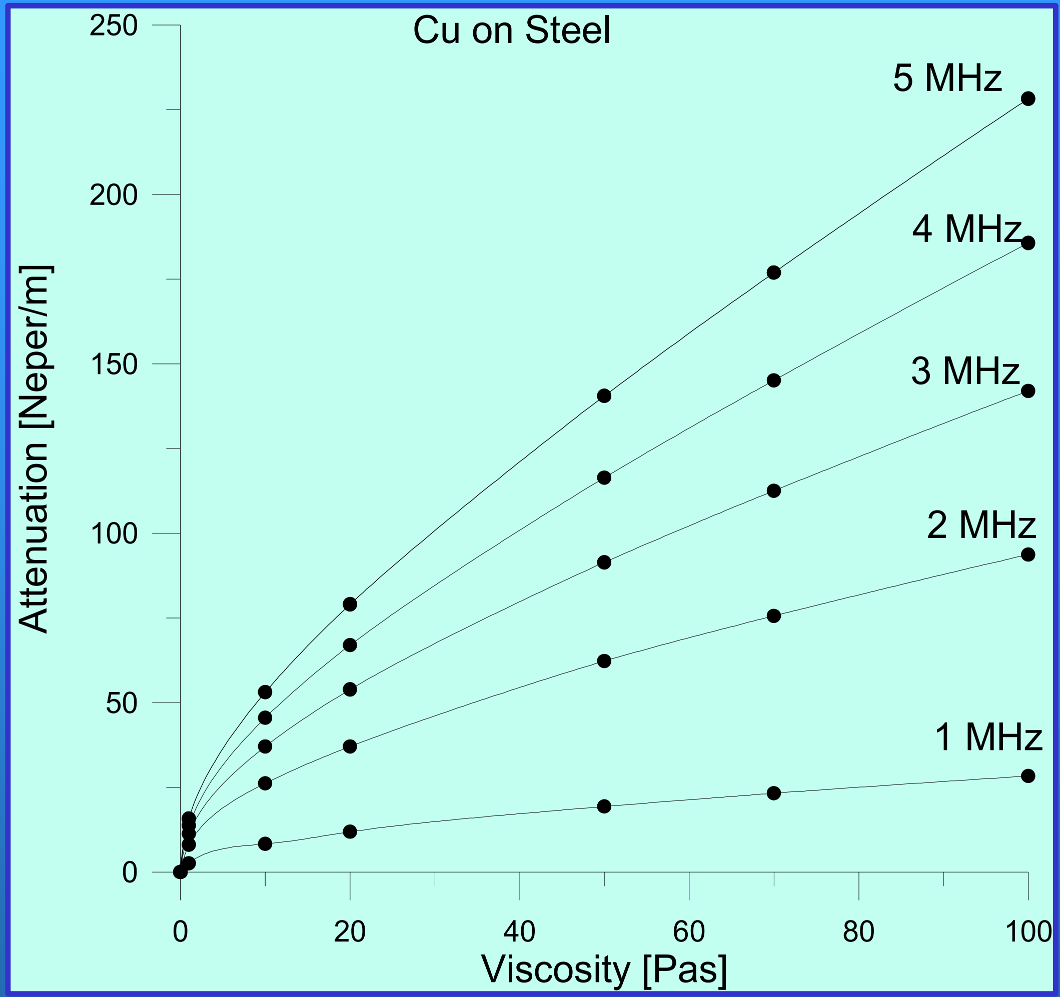
Rys.15. Prędkość fazowa fali Love'a w funkcji lepkości (f = 3 MHz).



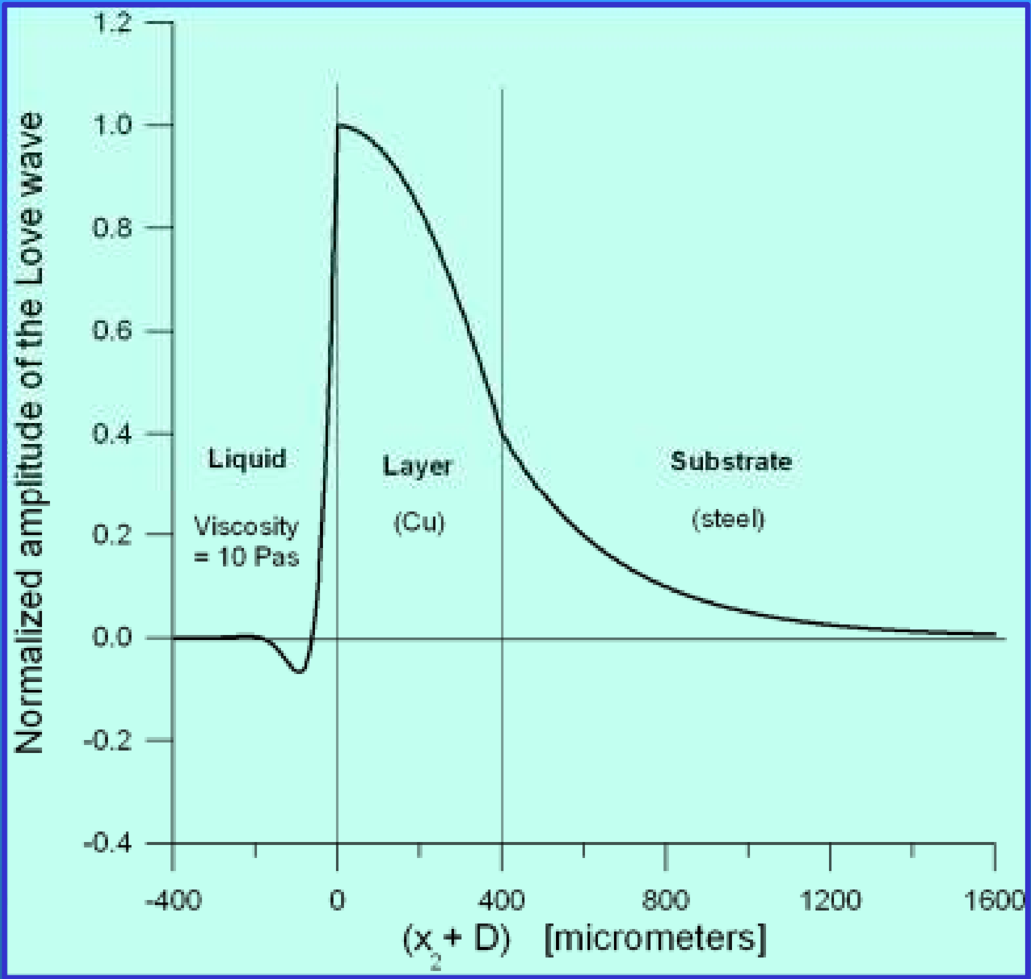
Rys.16. Prędkość fazowa fali Love'a w funkcji lepkości (f = 4 MHz).



- Rys.17. Prędkość fazowa fali Love'a w funkcji lepkości (f = 5 MHz).



Rys.18. Tłumienie fali Love'a w funkcji lepkości cieczy (f = const).



Rys.19. Znormalizowane przemieszczenie mechaniczne fali Love'a (część rzeczywista) w funkcji głębokości.

Podsumowanie

- Rozwiązano Zagadnienie Proste dotyczące rozchodzenia się fali Love'a w falowodzie sprężystym obciążonym na powierzchni cieczą lepką
- Wyprowadzono wzór analityczny na zespolone równanie dyspersyjne dla fali Love'a rozchodzącej się w rozpatrywanej strukturze
- Rozseparowano część urojoną i rzeczywistą równania dyspersyjnego
- Rozwiązano układ 2 nieliniowych równań algebraicznych
- Przeprowadzono obliczenia krzywych dyspersji prędkości i tłumienia fal Love'a rozchodzących się w falowodzie miedź na stali + ciecz lepka
- Przeanalizowano wpływ lepkości cieczy na krzywe dyspersji fali Love'a
- Wyniki badań mogą znaleźć zastosowanie w geofizyce, sejsmologii, w projektowaniu sensorów lepkości cieczy oraz NDT materiałów

International Journal of Solids and Structures 49 (2012) 2314–2319

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

International Journal of Solids and Structures

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijsolstr

Effect of a viscous liquid loading on Love wave propagation

P. Kiełczyński *, M. Szalewski, A. Balcerzak

Institute of Fundamental Technological Research, Polish Academy of Sciences, ul. Pawinskiego 5B, 02-106 Warsaw, Poland

32 pkt

Przyszłe Prace

Zagadnienie Odwrotne

Wyznaczyć nieznaną lepkość cieczy lepkiej obciążającej powierzchnię falowodu

1. Pomiar krzywej dyspersji fali Love'a

2. Rozwiązanie Zagadnienia Prostego

4. Sformułowanie Zagadnienia Odwrotnego

5. Zbudowanie Funkcji Celu

6. Zastosowanie Metod Optymalizacyjnych
   (Rozwiązanie Zagadnienia Odwrotnego)